Fallstudien zu Mathematisierungsprozessen beim Lösen von Textaufgaben

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie
im Fachbereich Erziehungswissenschaften
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Jürgen Polster
Diplompädagoge aus Sangerhausen

1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523705_0012

FALLSTUDIEN ZU MATHEMATISIERUNGSPROZESSEN BEIM LÖSEN VON TEXTAUFGABEN

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie
im Fachbereich Erziehungswissenschaften
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

JÜRGEN POLSTER

Diplompädagoge aus Sangerhausen

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Diederich

2. Gutachter: Prof. Dr. R. Meier

Tag der mündlichen Prüfung: 25. 1. 1983

ZUSAMMENFASSUNG

In den Fallstudien wurden Mathematisierungsprozesse beim Lösen von Textaufgaben untersucht und hierbei auftretende Mathematisierungsfehler analysiert und lokalisiert.

Der Zugang zu durch Textaufgaben vermittelten Sachverhalten erfolgt über die Sprache, sie ist als zentrale Komponente des Mathematisierungsprozesses anzusehen. Zur Analyse realer Prozesse wurde daher unter Zugrundelegung eines semantischen Vierebenenmodells mit den Subsprachen mathematische Textsprache, Löseridiolekt, mathematische Unterrichtssprache und mathematische Symbolsprache, ein Mathematisierungsmodell entwickelt, das neben den semantischen Transformationen zwischen den Sprachebenen, die Mathematisierungen Informationsanalyse, Strategieanwendung/ -entwicklung und Operatoranwendung umfaßt.

Auf der Grundlage dieses Mathematisierungsmodells entwickelte standardisierte Lösungsverfahren zu Textaufgaben wurden zunächst in einer Erkundungsstudie mit den schriftlichen Aufzeichnungen von 18 Schülern zu 17 Textaufgaben verglichen. Hierbei zeigte sich, daß die Anzahl der Mathematisierungsfehler die Anzahl der Rechenfehler um mehr als das Doppelte übertraf. Aussagen zu Einzelmathematisierungen und deren Abfolge im Lösungsprozeß waren aus den schriftlichen Aufzeichnungen nicht möglich.
Aufschluß hierzu wurde von der später durchgeführten Hauptstudie erwartet, in der die Lösungsprozesse von 12 Schülern zu 9 Textaufgaben mit der Methode des Lauten Denkens beobachtet wurden. Zur Prozeßanalyse wurden grafische Darstellungen der Wortprotokolle mit grafischen Darstellungen der Standardisierungen verglichen. Es konnte gezeigt werden, daß einfach strukturierte Aufgaben gemäß den Standardisierungen gelöst wurden, löserspezifische Strategieanwendungen bei Verfügbarkeit über mehrere Lösungsstrategien erfolgten und daß Mathematisierungsfehler dann auftraten, wenn die Löser über unzureichende mathematische Fähigkeiten verfügten, die mathematische Textsprache nur unzureichend verstanden oder der zugrundeliegende Sachverhalt fehlinterpretiert wurde.

To be against applications of mathematics in teaching is like being against motherhood and in favor of sin.
POLLACK, 1969, S. 24

Einem Bothen, der schon vor 10 Tagen von einem gewissen Orte abgegangen war, wird aus demselben Orte, und auf demselben Wege, ein anderer Bothe nachgeschickt, um jenen einzuholen. Wenn nun der erste Bothe täglich 4, der andere täglich 9 Meilen zurücklegt: wie viele Tage wird der zweite brauchen, um den ersten einzuholen? (Meier Hirsch, 1816, S. 132)

Ein Verkehrsflugzeug fliegt von Frankfurt mit 480 km/h ab. Nach 42 Minuten startet ein Düsenflugzeug mit 900 km/h zum gleichen Ziel. Wann und wo begegnen sie sich? (Hahn, 1972, S. 78)

INHALTSVERZEICHNIS

0	Problemstellung	1
I. Teil		5
1.	Mathematisierungsprozesse	5
1.1.	Zum Begriff Mathematisieren	5
1.2.	Darstellung des Mathematisierungsprozesses in der mathematikdidaktischen Litertur	6
1.3.	Mathematisches Problemlösen	9
1.4.	Untersuchungsmethoden	11
1.4.1.	Denkprodukte	11
1.4.2	Denkprozesse	12
2.	Textaufgaben, Definitionen und Befunde empirischer Untersuchungen	15
2.1.	Definition des Begriffes Textaufgabe	15
2.2.	Begründung und kritische Reflexion des Sachrechnens	15
2.3.	Befunde empirischer Untersuchungen zum Lösen von Textaufgaben	20
2.4.	Diskussion der Befunde und Folgerungen	25
II. Teil		29
3.	Mathematisierungsprozesse beim Lösen von Textaufgaben	29
3.1.	Komponenten des Lösungsprozesses	30
3.1.1.	Semantische Kongruenz	30
3.1.2.	Sachkongruenz	33
3.1.3.	Mathematische Kongruenz	33
3.2.	Entwicklung eines Mathematisierungsmodells zum Lösen von Textaufgaben	35
3.2.1.	Entwicklung eines semantischen Vierebenenmodells	35
3.2.2.	Einzelphasen des Lösungsprozesses	37
3.3.	Entwicklung und Anwendung eines Untersuchungsinstruments zur Analyse realer Prozesse	42
4.	Die Erkundungsstudie	52
4.1.	Fragestellungen und Untersuchungsmethoden	52
4.1.1.	Kategorisierung von Textaufgaben	53
4.1.2.	Die verwendeten Textaufgaben	55

4.2.	Ergebnisse der Erkundungsstudie	57
4.2.1.	Überblick	57
4.2.2.	Einzeldarstellungen	61
4.3.	Diskussion und Folgerungen	71
5.	Die Hauptstudie	74
5.1.	Planung der Hauptstudie	74
5.1.1.	Thesen zur Hauptstudie	74
5.1.2.	Untersuchungsinstrumente	75
5.1.3.	Untersuchungsmethoden	77
5.2.	Untersuchungsergebnisse	78
5.3.	Analysen der Untersuchungsergebnisse	97
5.3.1.	Analysen der Prozeßabläufe	97
5.3.2.	Strategieanalysen	99
5.3.3.	Analysen der a-Fehler	101
5.4.	Zusammenfassung und Ausblick	103
6.	Anmerkungen	105
7.	Anhang	127
	Inhaltsverzeichnis des Anhangs	127
8	Literaturverzeichnis	167

0 PROBLEMSTELLUNG

> "Die angewandte Mathematik (Mechanik, Optik, Baukunst, Feldmessung usw.) spielte im mathematischen Unterricht des 18. Jahrhunderts eine große Rolle; vielfach war sie Ziel und Zweck der theoretischen Unterweisung. Im 17. Jahrhundert war sie so gut wie unbekannt, wurde nur an einzelnen Schulen, besonders an Ritterakademien betrieben, und im 19. Jahrhundert wanderte sie größtenteils in den physikalischen Unterricht und in die Fachschulen ab." (GRUNDEL, 1929, S.139)

Die Mathematik des 18. Jahrhunderts wurde geprägt von den Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Mechanik und ist verbunden mit den Namen bedeutender Mathematiker wie LEIBNITZ, BERNOULLI, EULER, LAGRANGE und LAPLACE (1).
Die Entwicklung dieser praktischen Seite der Mathematik wurde von einigen Fürstenhäusern unterstützt, die sich hierdurch eine Verbesserung ihres militärischen Potentials erhofften.

Mit den Anwendungen öffnete sich der Blick für weitere, zunehmend komplexere mathematische Probleme, die einerseits Impulse für die Arbeiten etwa von GAUSS, RIEMANN, KLEIN oder POINCARÉ lieferten, andererseits jedoch zu einer zunehmenden Spezialisierung führten, durch die das Gesamtgebiet der Mathematik rasch unüberschaubar wurde. Mit der Spezialisierung vollzog sich eine zunehmend stärkere Trennung in angewandte und reine Mathematik, reine Mathematik gewann an Bedeutung und drängte die nur angewandte zurück.

Unter den Befürwortern für eine Synthese der divergierenden Richtungen ist im 20. Jahrhundert besonders FELIX KLEIN zu nennen, dessen Bemühungen um eine Synthese durch Reform des Lehrstoffs an Schulen und Universitäten in zahlreichen Vorträgen zum Ausdruck kommt (2). Trotz der breiten Zustimmung, die diese Bestrebungen fanden, zeitigten sie nur relativ geringe didaktische Wirkung.

In den 60-er Jahren dieses Jahrhunderts wandte man den Blick wieder verstärkt auf Anwendungen der Mathematik im Unterricht, nun jedoch in dem Bemühen, Umweltprobleme durch mathematische Strukturen zu erschließen.
Dieses Bemühen kommt in der NEUEN MATHEMATIK nach der Reform des Mathematikunterrichts durch den Beschluß der Kultusministerkonferenz vom Oktober 1968 zum Ausdruck (3). Durch diese Reform sollte der Weiterentwicklung der Mathematik, der hierdurch begünstigten sprunghaften Entwicklung neuer Technologien und dem Bestreben zur Überwindung des traditionellen dreigliederigen Schulsystems Rechnung getragen werden. Die schulformspezifischen Zielsetzungen, die sich in den Lehrplänen der Länderkultusminister widerspiegelten (4) und im Mathematikunterricht nicht nur nach Schulart, sondern sogar nach Geschlecht (5) differenzierten, wurden durch Rahmenpläne ersetzt.

Der revidierte Mathematikunterricht hat umfassende mathematische Bildung für Schüler aller Schularten zum Ziel: Er will einen Beitrag zur allgemeinen Denkerziehung leisten und Grundlagen zur Begegnung mit der Wissenschaft Mathematik schaffen (6).
Denkerziehung durch das Primat fundamentaler Strukturen (7) ist im modernen Mathematikunterricht durchgängiges Prinzip, Fertigkeiten durch im Sachrechnen vermittelte Anwendungsmuster des früheren "bürgerlichen Rechnens" treten zugunsten einsichtsvollen Transfers mathematischer Strukturen auf reale Situationen zurück.
Dieser Strukturtransfer ist somit zentraler Beitrag des Mathematikunterrichts zum Umweltverständnis der Schüler. Sie sollen durch Mathematikunterricht befähigt werden, außermathematische Probleme mittels geeigneter mathematischer Strukturen zu analysieren, sie zu *mathematisieren* und zu lösen.

Ausgangspunkt und häufig einziger Bezug für Anwendungen der Mathematik in der Schule sind in Textaufgaben beschriebene inner- oder außermathematische Sachbezüge.
Die unterrichtliche Behandlung dieses Aufgabentyps gehört erfahrungsgemäß zu den unbeliebteren, schwierigeren Abschnitten im Mathematikunterricht. Selbst bei "sicheren Rechnern" treten hier häufiger als bei anderen Aufgabentypen Fehler bei der Bearbeitung auf, Lehrer äußern ihren Unmut über in Schulbüchern anzutreffende Textaufgaben: Der zugrunde liegende Sachverhalt erscheint ihnen inadäquat oder die verwendete Sprache zu schwierig.

Dies und eigene Mißerfolgserlebnisse bei der unterrichtlichen Behandlung von Textaufgaben waren Anlaß, den Ursachen des Unbehagens und der Fehlleistungen nachzugehen - und zwar unter der zunächst undifferenzierten Fragestellung nach dem Ablauf des Lösungsprozesses, dem Einfluß der strukturellen Komponenten von Textaufgaben und dem Auftretensort von Schülerfehlern im Lösungsprozeß. Sehr bald ergab sich die Notwendigkeit, das Lösen von Textaufgaben als Mathematisierungsprozeß zu beschreiben, hierzu ein Prozeßmodell zu entwickeln und die Prozeßschritte als von sprachlichen, sachlichen und mathematischen Aufgabenkomponenten bedingte Mathematisierungen darzustellen.
Aus Vergleichen realer Lösungsprozesse mit dem Prozeßmodell wurden Aufschlüsse über Auftretensort und Ursachen von Fehlern erwartet. Zunächst galt es jedoch generell zu klären,

- inwieweit das Prozeßmodell zur Analyse realer Prozesse geeignet war

und

- welche Fehler beim Lösen von Textaufgaben auftraten,

um hierdurch die Fragestellung der Hauptstudie zu präzisieren. Daher wurde der Hauptstudie eine Erkundungsstudie vorangestellt. Durch sie gelang es, die Eignung des Prozeßmodells zur Analyse realer Prozesse nachzuweisen, sowie Mathematisierungsfehler als Hauptfehlerquelle zu isolieren. Damit ließen sich für die Hauptstudie drei untersuchungsleitende Fragen formulieren:

1. Inwieweit stimmen Einzelmathematisierungen realer Prozesse und deren Abfolge mit dem Mathematisierungsmodell überein?

2. Welche Faktoren sind für Anwendung und Entwicklung einer bestimmten Lösungsstrategie bedeutsam?
3. Auf welche Ursachen lassen sich Mathematisierungsfehler zurückführen und welcher Prozeßphase sind sie zuzuordnen?

Diese Fragen wurden der Thesengenerierung der Hauptstudie zugrunde gelegt.

Die vorliegende Studie gliedert sich in zwei Teile.
Im ersten Teil erfolgt zunächst eine Klärung der Begriffe *Mathematisieren* und *Mathematisierungsprozeß* sowie eine Beschreibung von Untersuchungsmethoden zur Erfassung kognitiver Prozesse (Kapitel 1).
Daran schließen sich im zweiten Kapitel nach einer Klärung des Begriffes *Textaufgabe* eine Darstellung empirischer Forschungsergebnisse zur Lösung von Textaufgaben und eine Isolierung der Komponenten des Lösungsprozesses an.
Im zweiten Teil der Studie wird ein *Mathematisierungsmodell* zur Analyse von Lösungsprozessen bei Textaufgaben entwickelt und in der Erkundungs- und Hauptstudie auf reale Prozesse angewandt.
Der Modellentwicklung im dritten Kapitel wird eine Analyse von *Aufgaben-* und *Lösevariablen* sowie ihrer Bedeutung für den Lösungsprozeß, der Beschreibung der Einzelmathematisierungen des Prozeßmodells vorangestellt. An die Entwicklung des Modells schließt sich dessen exemplarische Anwendung auf eine Textaufgabe und einen realen Lösungsprozeß an.
Im vierten Kapitel folgt die Beschreibung der Erkundungsstudie, durch die das Modell zunächst einer Prüfung durch Anwendung auf schriftliche Schüleraufzeichnungen unterworfen wurde. Aus dieser Erkundungsstudie konnten Lösungsstrategien und Schülerfehler isoliert und die o.a. Fragen für die Durchführung der Hauptstudie, die im fünften Kapitel beschrieben wird, gewonnen werden.

Die Fallstudie (Erkundungs- und Hauptstudie) wurde mit einer geringen Anzahl von Schülern (18 bzw. 12 Schüler) durchgeführt.
Die verwendeten Textaufgaben wurden teils derzeit verwendeten Mathematikbüchern entnommen, teils selbst entwickelt. Die gewonnenen Ergebnisse sind keineswegs repräsentativ und durch den Untersucher gefiltert - dies ist eine Schwäche der Studie. Ihre Stärke liegt in den detaillierten Beschreibungen, den Mikroanalysen individueller Vorgehensweisen der Schüler und im Erkennen der Unterschiede (8).
Von hier aus kann die Studie an die Erfahrungen anderer Lehrer anknüpfen, sie erweitern und zu einer inhaltlichen Auseinandersetzung führen (9).

I. TEIL

1. MATHEMATISIERUNGSPROZESSE

In diesem Kapitel wird zunächst der zentrale Begriff Mathematisieren erläutert und seine Verwendung in der mathematikdidaktischen Literatur dargestellt. Daran schließen sich im Abschnitt 1.3. Darstellungen des Mathematisierungsprozesses als mathematisches Problemlösen und der dazu erforderlichen Aktivitäten des Mathematisierens an. Eine Beschreibung kognitionspsychologischer Methoden zur Erfassung interner Mathematisierungsprozesse erfolgt im Abschnitt 1.4.

1.1. Zum Begriff Mathematisieren

In erster Annäherung kann man unter Mathematisieren das Beschreiben konkreter Situationen durch mathematische Modelle verstehen. Bildhaft ist es dem Überstreifen eines aus mathematischen Strukturen gewobenen Netzes über konkrete Situationen vergleichbar. Damit dieses "Abbilden" erfolgen kann, muß die konkrete Situation zunächst so aufbereitet werden, daß ihre elementaren Komponenten sichtbar werden.

STEINER (1965, S.188) nennt dies:

> "... begriffliche Aufbereitung und strukturelle Erschließung noch zu mathematisierender Gegenstandsbereiche",

FREUDENTHAL (1977, S.49) bezeichnet es als

> "... Ordnen der Wirklichkeit ..." (10).

Nach dieser Aufbereitung, diesem Ordnen, gilt es, geeignete mathematische Strukturen aufzufinden und so zu einem Modell zusammenzufügen, daß dieses Modell das Gefüge der zuvor isolierten Strukturelemente wiederspiegelt, hiervon ein mathematisches Abbild entsteht (11). Durch dieses Abbilden erfolgt zugleich Prüfung der Modellgüte, Prüfung, inwieweit die situationellen Strukturen durch dieses mathematische Modell erfaßt und beschrieben werden.

Drei aufeinanderfolgende Schritte werden sichtbar:

- Aufbereiten der konkreten Situation zur Erkennung und Isolierung ihrer Strukturmerkmale;
- Auffinden äquivalenter mathematischer Strukturen und Entwicklung eines mathematischen Modells;
- Abbilden der Strukturelemente des mathematischen Netzes auf die aufbereitete Situation.

Diese Schritte sind in ihrer Abfolge nicht austauschbar, sondern Teile eines sukzessiv ablaufenden Prozesses, des Mathematisierungsprozesses.

1.2. Darstellung des Mathematisierungsprozesses in der mathematikdidaktischen Literatur

STEINER (1976, S.225 ff) unterscheidet insgesamt 11 Einzelschritte im Mathematisierungsprozeß:

"(1) Vertrautmachen mit der Situation möglichst in der Nähe des Problems; Beobachten, Informationsbeschaffung; Datenbeschaffung (Messung?).

(2) Informationsanalyse und Datenverknüpfung führen zum Entwurf

(a) eines pragmatischen Ansatzes, der auf eine ingenieurmäßige Bearbeitung des Problems abzielt,

oder

(b) einer Schematisierung mit mehr oder weniger umfangreichen theoretischen Ansätzen.

(3) Rückkoppelung an die Situation, Deutung des Ansatzes am konkreten Material, gegebenenfalls Einholen weiterer Informationen und gezielter Beobachtungen unter den Perspektiven des Ansatzes.

(4) Erste Ausarbeitung des Schemas, Elaboration des Modells, Bearbeitung des Problems, stärkere Theoriephase.

(5) Deutung der in der ersten Ausarbeitung des Modells gewonnenen Resultate in der Situation (Decodierung), Interpretation der gewonnenen Lösung der Ausgangsprobleme, Kritik, weiterer Ausbau der Theorie, gegebenenfalls Neuansatz.

(6) Stellung und Bearbeitung weiterer Probleme, Erweiterung bzw. weiterer Ausbau des Modells, Auseinandersetzung mit konkurrierenden Modellen. Abstraktere Fassung der Theorie.

(7) Bezug des erweiterten Modells und der ausgearbeiteten Theorie auf die Situation, Deutung der weiteren Ergebnisse.

(8) Deutung und Anwendung der Theorie in anderen Gegenstandsbereichen innerhalb der Mathematik oder in anderen Anwendungsfeldern.

(9) Einbau der Theorie in größere mathematische Zusammenhänge und allgemeinere Theorien.

(10) Mathematisierung der mathematischen Ergebnisse und des Theorieaufbaus.

(11) Erschütterung der Theorie durch Situationen, die scheinbar abgedeckt sind, jedoch zu Widersprüchen führen. Versuch einer diese Situation umfassenden erweiterten Theorie."

Mit Schritt (5) ist der Mathematisierungsprozeß der initiierenden Situation abgeschlossen, es folgt die Anwendung des elaborierten Modells auf andere Probleme und hierzu entwickelter Modelle zur Gewinnung einer "umfassenden Theorie" - das Modell selbst wird nun einem Mathematisierungsprozeß unterworfen.

FREUDENTHAL (1977, S.49 f) bezeichnet dies als "Mathematisieren der Mathematik". Er unterscheidet zwei Arten des Mathematisierens:

- Ordnen der Wirklichkeit mit mathematischen Mitteln

  und

- Ordnen der hierbei gewonnenen mathematischen Erfahrungen mit mathematischen Mitteln,

wobei letzteres Ordnen die höchste Stufe des Mathematisierens ist (12).

GLAESER (1971, S.51 ff) entnimmt man folgende Einzelschritte des Mathematisierungsprozesses:

Situation, ganzheitliche Wahrnehmung, sprachliche Analyse, Symbolisierung, Axiomatisierung, axiomatische Theorie, Anwendung auf die Ausgangssituation (13).

Nach der Anwendung verläßt der Mathematiker die reale Situation und entwickelt deduktiv eine abstrakte Theorie.

WEBER (1980, S.76 ff) hebt drei Teilprozesse hervor:

"(I) Induktion, als den Schritt von Situation und Problem zur mathematischen Beschreibung:

Situation, Problem —Induktion→ mathematische Beschreibung

(II) Deduktion, als Übergang von der mathematischen Beschreibung zu Folgerungen und zur axiomatischen Theorie:

mathematische Beschreibung —Deduktion→ Folgerungen, axiomatische Theorie

(III) Verifikation, als Prüfung des mathematischen Modells am Originalproblem:

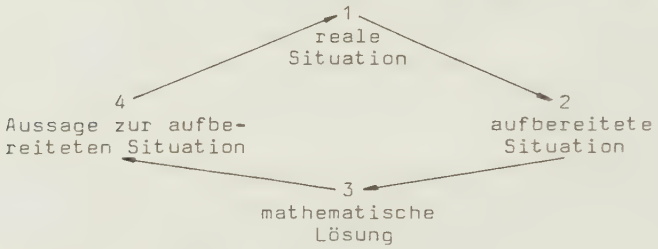
Folgerungen, axiomatische Theorie —Verifikation→ Situation, Problem".

KRYGOVSKA (1968, S.9) gibt vier Phasen an:

> "... observation, mathématisation, déduction et application." (14)

Aus dem vorangegangenen wird deutlich, daß der Begriff Mathematisieren in der mathematikdidaktischen Literatur nicht einheitlich gebraucht wird. Mit ihm werden sowohl mathematische Einzelaktivitäten eines Prozesses wie der Prozeß selbst bezeichnet, wobei zudem noch zwei unterschiedliche Interpretationen dieses Prozeßablaufs sichtbar werden:

(1) eine enge Fassung, die beispielsweise durch den Zyklus



beschreibbar ist, und

(2) eine erweiterte Fassung, in der solche Zyklen die eigentliche mathematische Aktivität erst initiieren, die schließlich in eine umfassende mathematische Theorie zur Interpretation der Realität mündet (15).

Die enge Fassung ist jedoch nichts anderes als ein Problemlösezyklus mit den Phasen "reale Situation", "mathematische Interpretation", "mathematische Lösung", "Anwendung", wobei die Phasenübergänge durch interne (geistige) mathematische Aktivitäten erfolgen.

In der Folge wird die enge Fassung (1) als mathematisches Problemlösen, kurz als Mathematisierungsprozeß beschrieben, die hierzu erforderlichen geistigen Aktivitäten als Mathematisierungen bezeichnet.
Die erweiterte Fassung (2) kann so in zwei aufeinanderfolgende Mathematisierungsprozesse aufgespalten werden, wobei - in Anlehnung an FREUDENTHAL - Kennzeichen des initiierenden Prozesses lokales, Kennzeichen des aufbauenden Prozesses globales Ordnen ist.
Im folgenden Abschnitt werden die Phasen dieses mathematischen Problemlöseprozesses grob beschrieben.

1.3. Mathematisches Problemlösen

Ein Problem kann als jener Ausschnitt einer Situation bezeichnet werden, der mit den gegenwärtig verfügbaren Mitteln nicht überschaubar ist (16). DÖRNER (1979, S.10) bezeichnet dies als unerwünschten Zustand, der durch Überwindung der vorhandenen Barriere in einen erwünschten Zustand zu überführen ist. Die Überwindung erfolgt durch Anwendung bestimmter Operatoren, die aus konkreten oder geistigen Aktivitäten bestehen. Das Problemfeld wird umgeordnet, implizit vorhandene Faktoren erkennbar, neue Zusammenhänge erschlossen, zusätzliche Informationen herangezogen und das Problem gelöst. Der abgelaufene Problemlösezyklus ist somit durch die Phasen:

Problemerkennung - Problemanalyse - Operatorentwicklung - Operatoranwendung

beschreibbar (17).

Kennzeichen jedes Mathematisierungsprozesses ist die Anwendung mathematischer Operatoren, die auf das der realen Ausgangssituation entwachsende Problem einwirken und damit den möglichen Suchraum bei der Hypothesengenerierung auf typisch mathematische Fragestellungen einengen.
Somit sind Mathematisierungsprozesse einer Unterkategorie (18) allgemeinerer Problemlösekategorien zuordenbar, diesbezügliche Modelle allgemeineren Problemlösemodellen unterzuordnen (19). Die Phasen Problemanalyse, Operatorentwicklung und Operatoranwendung sind im folgenden auch Phasen des Mathematisierungsprozesses, die Phase Problemfindung wird als zur Oberkategorie gehörend, nicht beschrieben.

Problemanalyse (Abb.1)

Das außermathematische Problem wird zunächst einem Tranformationsprozeß (T_1) unterworfen, durch den es so aufbereitet wird, daß mathematisch relevante Strukturelemente sichtbar werden. Wenigstens zwei Mathematisierungen (Codierungen) sind unterscheidbar:

(1) Übertragung des sprachlichen Problemkontextes auf mathematische Formulierungen (Codierung 1),

(2) Schematisierung der unter (1) erfolgten Codierung durch mathematische Symbol- und Strukturelemente (Codierung 2).

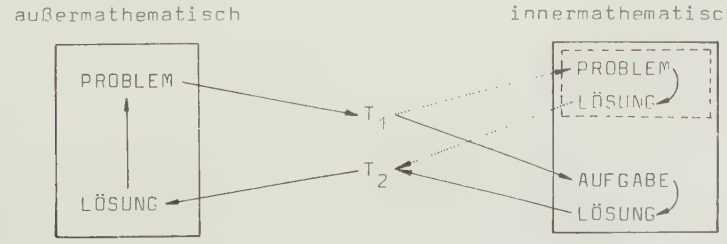


Abb.1

Im ersten Schritt erfolgt ein Verkürzen und Vereinfachen der Problemstruktur durch Weglassen relativ unwesentlich gehaltener Komponenten und Isolierung mathematisch relevanter Strukturen. Die ursprüngliche Komplexität des Problems wird hierbei eingeengt und zugleich vergröbert. Sprachliche Nuancen gehen verloren, soweit sie nicht mathematische Entsprechungen aufweisen die bereits zur Problemstruktur gehören. Das so erhaltene sprachliche Derivat wird anschließend weiteren Codierungen unterworfen, durch die sprachliche Formulierungen vollends durch mathematische Symbole und Zeichen ersetzt werden.

Operatorentwicklung

Den Operator bildet im Mathematisierungsprozeß das mathematische Modell. Zwei Fälle sind unterscheidbar:

a) Die Verknüpfungen der Strukturelemente sind durch ein bereits vorhandenes mathematisches Modell beschreibbar;

b) die verfügbaren mathematischen Verfahren reichen zur Problemlösung nicht aus, ein neues Modell muß entwickelt werden.

Der erste Fall, die Anwendung eines bereits vorhandenen mathematischen Modells, ist nach DÖRNER Aufgabenlösen:

> "Bei einer Aufgabe fehlt von den oben aufgezählten Komponenten der Problemlösesituation die dritte, nämlich die Barriere". (1979, S.10)

Dennoch kann der Gesamtkomplex bis zur Modellanwendung durchaus Problemcharakter haben, da vor T_1 noch keine Modellanwendung erfolgen kann.

Im zweiten Fall folgt innermathematisches Problemlösen, das mit der Verifikation der Lösung an den isolierten mathematischen Strukturelementen innermathematisch abgeschlossen ist.

In den beiden unterschiedenen Fällen steht nun der Operator als zu überprüfende Problemlösungshypothese, als mathematische Lösung oder besser, als mathematisches Modell zur Verfügung.

Operatoranwendung

Die Hypothesenprüfung erfolgt außermathematisch. Dazu muß in einem zweiten Transferprozeß (T_2) die mathematische Lösung decodiert, die durch T_1 erfolgte Symbolisierung invertiert werden (20). Zwei Decodierungen, die als zum Mathematisierungsprozeß gehörend als Mathematisierungen (3) und (4) bezeichnet werden, sind erforderlich:

(3) Übertragung der Symbol- und Strukturelemente auf verbal mathematische Formulierungen (Decodierung 1),

(4) Übertragung der aus (3) erhaltenen Formulierungen auf den Problem-(sprachlichen) Kontext.(Decodierung 2).

Der decodierte Operator wird nun auf das Ausgangsproblem angewandt. Entscheidend für den Anwendungserfolg ist die "Güte" des gewonnenen Operators, die sowohl durch die Genauigkeit, mit der

das mathematische Modell alle Facetten des Ausgangsproblems erfaßt, wie durch die Qualität der semantischen Transformationen bedingt wird.
Bei erfolgreicher Operatoranwendung ist der Mathematisierungsprozeß abgeschlossen, das Modell kann auf weitere Momente des Ausgangsproblems oder andere strukturgleiche Probleme angewandt werden. Führt die Hypothesenprüfung nicht zur Lösung des Problems, muß der Zyklus unter Einbeziehung nicht berücksichtigter Problemkomponenten erneut durchlaufen werden.

1.4. Untersuchungsmethoden

Mathematisierungsprozesse sind als intern verlaufende kognitive Prozesse direkter Beobachtung nicht zugänglich, ihre Untersuchung somit nur durch Auswertung mittels indirekter Methoden gewonnenen Datenmaterials aus

- Denkprodukten (schriftliche Aufzeichnungen, Zeitmessungen, etc.)

oder

- Denkprozessen ("Lautes Denken", Introspektion, etc.)

möglich.

Bei der Auswertung von Datenmaterial aus Denkprodukten muß auf zugrunde liegende Denkprozesse rückgeschlossen werden, die Interpretation ist somit stets von der jeweiligen Modellvorstellung des Untersuchungsleiters belastet.
Spekulative Züge sind auch bei der Auswertung der aus Denkprozessen gewonnenen Protokolle nicht auszuschließen, zumal

- prozeßorientierte Methoden nur einen Teil der insgesamt ablaufenden Prozesse erfassen

und

- subjektiv nebensächlich erscheinende Faktoren in Protokollen und Auswertungen häufig unberücksichtigt bleiben (21).

Im folgenden sollen einige Methoden und ihre Vor- und Nachteile dargestellt werden.

1.4.1. Denkprodukte

Schriftliche Aufzeichnungen

Aus schriftlichen Aufzeichnungen lassen sich Einzelschritte und deren Abfolge rekonstruieren und eine Grobstruktur des Lösungsprozesses entwickeln.
Die Einzelschritte markieren dann "Stationen" der verwendeten Strategie, ermöglichen die Konstruktion hypothetischer Lösungsstammbäume (22) und damit das Auffüllen noch vorhandener Lücken.
Zur Ergänzung können Fehleranalysen (23) herangezogen werden, die Aufschluß über Irrwege (Verzweigungen im individuellen Lösungsstammbaum) geben.
Bei einfachsten Problemen und genügend großer Anzahl von Versuchs-

personen mag die Auswertung schriftlicher Aufzeichnungen besonders bei der Schnelldiagnose hilfreich sein, sie versagt jedoch mit zunehmender Komplexität der Aufgabenstruktur. Wachsende Anzahl möglicher Schrittfolgen und damit verbundene steigende Irrtumswahrscheinlichkeit verbieten dann die alleinige Anwendung dieses Instruments zur Analyse von Problemlöseprozessen.

Zeitmessungen

Geht man davon aus, daß beim Lösen eines Problems bestimmte Phasen zu durchlaufen sind, können sowohl die Tempi der Einzelphasen als auch des Gesamtprozesses als Indikatoren individueller Problemlösefähigkeit genutzt werden. Voraussetzungen sind hierzu eindeutige Abgrenzungen einzelner Phasen und eine Unterscheidung linearer von verzweigten Problemlöseprozessen.
Sollen Zeitmaße zur Bewertung bestimmter Fähigkeiten in linearen Problemlöseprozessen genutzt werden, müssen nach FREIBICHLER (1977, S.70) folgende Bedingungen erfüllt sein:

- gleicher Schwierigkeitsgrad der Einzelschritte,
- Meßbarkeit der Schrittanfänge und -enden,
- Unabhängigkeit der Einzelschritte.

Diese Forderungen können bei komplexeren Problemen mit ineinander verschachtelten und voneinander abhängigen Phasen nicht erfüllt werden. Zeitmessungen können dann lediglich als Indikatoren möglicher Schwierigkeiten beim individuellen Lösen dienen, nicht aber Bewertungsgrundlage sein.

1.4.2. Denkprozesse

Während Analysen von Denkprodukten nur Rückschlüsse auf Problemlöseabläufe gestatten, sind die Abläufe selbst durch die Methoden des "Lauten Denkens" und der "Introspektion" zugänglich.

"Lautes Denken"

Beim "Lauten Denken" werden die Versuchspersonen aufgefordert, alle während des Lösungsprozesses auftauchenden Gedanken laut zu äußern. Diese Äußerungen werden protokolliert und anschließend ausgewertet.
CLAPARÈDE, der als erster diese Methode anwandte, beschreibt sie wie folgt:

> "Die Versuchsperson ... denkt ... ganz einfach, so wie wenn sie alleine arbeitend zu sich selbst sprechen würde. Aber das innere Sprechen ist durch das laute Sprechen ersetzt." (24)

Trotz des unbestreitbaren Vorteils direkter Beobachtbarkeit müssen bei Anwendung dieser Methode Einschränkungen in Kauf genommen und mögliche Fehlerquellen berücksichtigt werden. Die von der Versuchsperson geäußerten Gedanken werden über die Sprache

> "... als Medium über innere Prozesse zugänglich."
> (LÜER, 1973, S.31)

Die Sprache wirkt demnach als individuelles "Gedankenfilter", das unterschiedlich stark ausgeprägt sein kann. LÜER führt die unterschiedlichen Tempi, mit denen Denken und Sprechen ablaufen, und die hierdurch erfolgenden Verkürzungen in Protokollen als nachteilig an, wogegen MERZ (1969, S.144 ff) bei komplexen Aufgaben Leistungssteigerungen konstatiert, eine Erscheinung, auf die GAGNÉ/SMITH bereits 1962 (S.12 ff) hinwiesen.
Bedeutsamer sind Störeffekte, die von Interaktionen und Untersuchungsmaterialien ausgehen können. Während Störeffekte durch das Instrumentarium als konstante Größe eingebracht werden können oder mit wachsender Vertrautheit vernachlässigbar sind, können Interaktionseffekte nur schwer beurteilt werden.

LÜER ist der Ansicht, daß Interaktionen den prozessualen Gedankenablauf nicht stören (25), jedoch beeinflussen sie Auswahl und Verknüpfung der Gedanken als Prozeßelemente innerhalb der individuellen Denkstruktur.
Jeder externe Reiz muß als zusätzlicher Impuls im Informationsverarbeitungsprozeß bewertet werden, eine Erfahrung, die jeder Prüfer ängstlicher oder "unsicherer" Kandidaten bestätigen kann. So wirken bewußte oder unbewußte Reaktionen der Versuchsleiter besonders dann stimulierend, wenn

- schlechte Verbalisierer ins Stocken geraten, der Gedankenfluß auf der Suche nach geeigneten Begriffen unterbrochen wird,

oder

- Gedankensprünge oder plötzlich auftretende Lösungsideen nicht interpretiert werden können.

DÖRNER vertritt die Auffassung, Interventionen der Versuchsleiter seien zum Ausfüllen der durch Blockaden entstehenden Protokolllücken erforderlich, während FREIBICHLER (1977, S.72) die Interventionen der Versuchsleiter bei den von LÜER, PUTZ-OSTERLOH und DÖRNER beschriebenen Untersuchungen mit der Methode des "Lauten Denkens" als massive Eingriffe rügt.

Zweifellos beeinflussen Interventionen originäre Denkabläufe (26). Läßt man sie in Protokollen mit der Methode des "Lauten Denkens" zu, müssen sie auf ein Mindestmaß beschränkt und nicht-direktiver Art sein, andernfalls wird die Methode zum Interview verändert. In jedem Fall müssen Art und Umfang der Interventionen eindeutig gekennzeichnet sein.

Introspektion

Bei der Introspektion berichten Versuchspersonen retrospektiv über ihre Denkabläufe. Nur besonders geeignete Personen sind in der Lage, das eigene Denken distanziert zu analysieren, sie müssen

"... denken und sich denken sehen."(CLAPARÈDE, 1971, S.110)

Diese Spaltung ist beim "Lauten Denken" nicht erforderlich, die Gefahr, daß bei ständiger kritischer Reflexion über zusätzlich einfließende Assoziationen Strategiewechsel erfolgen oder der Lösungsprozeß ins Stocken gerät, ist bei der Introspektion ungleich größer als beim "Lauten Denken".

FREIBICHLER (1977, S.70) führt hier folgende methodische Einwände an:

- Unterbrechung des Denkablaufs durch Selbstbeobachtung,
- Veränderung des Denkablaufs durch Einprägen,
- Auslese geeigneter Individuen,
- Erinnerung nur subjektiv wichtiger Teilprozesse.

Nachträgliches Lautes Denken

WAGNER/MAIER/UTTENDORF/WEIDLE setzten eine als "Nachträgliches Lautes Denken" (NLD) bezeichnete Untersuchungsmethode zur Erfassung kognitiver Strukturen im Unterricht ein. Bei dieser Methode wurden Videoaufnahmen realer Handlungsabläufe gefertigt, an denen die zu interviewenden Versuchspersonen beteiligt waren. Die Aufnahmen wurden den Versuchspersonen im Anschluß an die Handlungen vorgeführt, wobei der Interviewer die Frage stellte: "Was ist dir/euch an dieser Stelle durch den Kopf gegangen?" Die Autoren gehen bei der Anwendung dieser Methode davon aus, daß beim Wiederholen des Geschehens

> "... sowohl ein Teil der in dieser Situation vorhandenen Kognitionen wieder zugänglich werden, als auch, daß das Wissen um den weiteren Verlauf der Handlung bestimmte andere Kognitionen hervorruft. Da nun die vorhandenen kognitiven Strukturen des Befragten sich nicht so blitzschnell ändern können, sondern der Teil, der sowohl bewußt als auch sprachlich zugänglich ist, sich möglicherweise bei nachträglicher Betrachtung verschiebt, ist anzunehmen, daß der Befragte sich nun zum Teil seiner Denkprozesse erinnert.
> Vielleicht mag dieser Teil nicht mit den tatsächlichen Denkvorgängen in der Situation kongruent sein (...), aber es ist ein Teil ein und derselben Struktur."
> (WAGNER/MAIER/UTTENDORF/WEIDLE, 1981, S.36)

Diese Methode entspricht im wesentlichen der oben beschriebenen Introspektion, allerdings können durch derartige Bildprotokolle externe Einflüsse genauer analysiert und entsprechend berücksichtigt werden. Das Bildprotokoll ist zudem stets mehreren unabhängigen Auswertern zugänglich, so daß subjektive Interpretationen weitgehend kontrolliert werden können.

2. TEXTAUFGABEN, DEFINITIONEN UND BEFUNDE EMPIRISCHER UNTERSUCHUNGEN

Bei der Bezeichnung von mathematischen Aufgaben, in denen außer mathematischen Symbolen und Zeichen noch textsprachliche Formulierungen verwendet werden, ist keine Einheitlichkeit in der mathematikdidaktischen Literatur anzutreffen. Während etwa BREIDENBACH durchgängig den Begriff Textaufgabe verwendet, bezeichnet LAUTER (1978, S.656) als Textaufgaben alle sprachlich abgefaßten Aufgaben, die keiner realen Umweltsituation entsprechen. Er stellt ihnen Sachaufgaben gegenüber, die im Gegensatz zur Eindimensionalität von Textaufgaben mehrere Repräsentations- und Abstraktionsstufen aufweisen (27).
Andere Autoren unterscheiden zwischen eingekleideten Aufgaben, Textaufgaben und Sachaufgaben (28).
KOBES (1975, S.16) bezeichnet eingekleidete Aufgaben

> "... auch als Anwendungsaufgaben, Sach- oder Textaufgaben ...: Ein reales Problem wird mit Hilfe der natürlichen Sprache beschrieben, und es wird gefordert, diese Beschreibung struktureller Beziehungen in eine formale Beschreibung zu überführen, die es gestattet, einen bekannten Lösungsalgorithmus (zum Beispiel Lösen linearer Gleichungen mit einer Unbekannten) anzuwenden."

Im folgenden wird durchgängig der Begriff Textaufgabe verwendet, allerdings ist hierzu zunächst eine Begriffsschärfung erforderlich, die in Abschnitt 2.1. erfolgt. In Abschnitt 2.2. schließt sich eine Wiedergabe einiger Begründungen des durch Textaufgaben vermittelten Sachrechnens und eine kritische Betrachtung hierbei verwendeter Textaufgaben an.
Einige Befunde empirischer Untersuchungen zu Fehlern beim Aufgabenlösen folgen in Abschnitt 2.3. Aus den Ergebnissen dieser Befunde werden lösungsbestimmende Variablen isoliert, und ihre Bedeutung im Lösungsprozeß wird untersucht.

2.1. Definition des Begriffes Textaufgabe

Im Mathematikunterricht verwendete Aufgaben bestehen aus gewissen Elementen Z_r und Funktionen F_n der Form

$$F_n\,(F_{n-1}\,(\ldots(F_1(Z_1))\ldots)) = Z_r$$

aus der sich durch Anwendung eines Lösungsalgorithmus nach endlich vielen Schritten eine Lösung der Form

$$Z_1 = F_1^{-1}\,(\ldots(F_{n-1}^{-1}\,(F_n^{-1}\,(Z_r)))\ldots)$$

ergibt.

Elemente und Funktionen können in numerischer oder sprachlicher Form vorliegen. Ordnet man nach diesem Kriterium, sind zwei Aufgabenkategorien unterscheidbar:

Kategorie A: Formale Aufgaben, in denen ausschließlich mathematische Zeichen und Symbole (etwa der Form $3x + 24 = 53$) verwendet werden;

Kategorie B: Aufgaben, in denen sprachliche Formulierungen benutzt werden (wobei der sprachliche Anteil so groß sein kann, daß keine formalen Angaben enthalten sind) (29).

Aufgaben der Kategorie B werden im folgenden *Textaufgaben* genannt.

Zur Lösung formaler Aufgaben erfolgt unmittelbares, zur Lösung von Textaufgaben mittelbares Anwenden eines mathematischen Algorithmus, sprachliche Formulierungen müssen zuvor auf mathematische Strukturen und Objekte abgebildet werden.

2.2. Begründung und kritische Reflexion des Sachrechnens

Der Bezug zwischen schulischem Mathematikunterricht und außerschulischer Umwelt soll durch das Sachrechnen im Mathematikunterricht hergestellt werden.

> "Der Mathematikunterricht soll an allen geeigneten Stellen umweltbezogene Probleme und Fragestellungen aufgreifen. Auf diese Weise soll der Schüler erkennen, in welchem Maße mathematische Denk- und Betrachtungsweisen auch in der Umwelt von Bedeutung sind und zu deren Verständnis beitragen können." (Rahmenrichtlinien des Hessichen Kultusministers für die Sekundarstufe I, Mathematik, 1972, S.6)

MAIER/SCHUBERT (1978, S.13 ff) geben folgende Begründungen für das Sachrechnen:

a) Ausgangspunkt mathematischer Begriffsbildung oder Verfahrensentwicklung;
b) Anwendungs- und Prüfsituation für bereits erlernte Verfahren;
c) Vorbereitung auf Einsicht in reale Situationen mit den Mitteln des Rechnens, d.h. rechnerische Mittel als Entwicklungshilfe bei der Bewältigung realer Situationen.
   Sachrechnungen haben danach als schulische Kunstform elementarisierter Sachprobleme Vorbereitungsfunktion auf komplexere Aufgabenstellung;
d) übergreifende allgemeinpädagogische Funktion durch Weckung der Bereitschaft und Fähigkeit der Anwendung des Erlernten in neuen Situationen.

STREHL (1979, S.24) interpretiert Sachrechnen im Mathematikunterricht als

> "Anwendung der Mathematik auf vorgegebene Sachprobleme und Mathematisierung konkreter Erfahrungen und Sachzusammenhänge." ,

nach LAUTER (1978, S.655 ff) werden im Sachrechnen mit Aufgaben, die reale oder gedachte Umweltsituationen zum Gegenstand haben, die Ziele Mathematisieren, Formalisieren und Interpretieren verfolgt, wobei er unter Mathematisieren versteht:

> "Situationen erfassen und beschreiben (durch Schematisierung), Daten gewinnen (durch Zählen, Messen, Schätzen, Ablesen usw.), Lösungsverfahren auswählen, Lösungen interpretieren usw." (S.656).

WINTER (1976, S.263) setzt sich kritisch mit der "Neuen Welle" der angewandten Mathematik in didaktischer Literatur, Lehrplänen und Schulbüchern auseinander und bedauert:

> "Leider hat die Didaktik bisher versäumt, das Gesamtproblem 'Umwelterschließung' im Mathematikunterricht systematisch zu untersuchen."

In der Tat, Umwelterschließung durch Sachrechnen scheint im traditionellen Rechenunterricht durch dessen Einbettung in den Gesamtunterricht eher stattgefunden zu haben als im heutigen Mathematikunterricht (30).

Die Gründe hierfür sind vielfältig.
Heute wird das Fach Mathematik bereits in der Grundschule weitgehend isoliert von anderen Fächern gelehrt, Gesamtunterricht ist Fachunterricht gewichen (31).
Schlecht ausgebildete Lehrer lehren schon in der Grundschule abstrakte Systeme, die sie selbst nicht verstanden haben und auch nicht auf die Realität übertragen können - die KLEIN'schen Bestrebungen werden in der Schule auf den Kopf gestellt - die Verwissenschaftlichung elementaren Mathematikunterrichts entfremdet die Schüler von bekannten Bezügen (32).
Im Vordergrund des Sachrechnens stehen weniger mit Textaufgaben verbundene Sachprobleme und deren mathematische Erschließung, als vielmehr die Anwendung eines formalen Lösungsschemas, häufig des Simplex-, Komplexverfahrens (33), zur rechnerischen Aufgabenlösung.
Vertrautheit mit der Sache wird durch eigenes Erleben der Schüler oder durch Unterricht in anderen Sachfächern vorausgesetzt (34), eine eingehende Sachklärung im Mathematikunterricht als kaum erforderlich angesehen (35).

In der Praxis kann jedoch heute, mindestens aufgrund der im Vergleich zu früher gestiegenen Mobilität, nicht von gleichen Sachvorerfahrungen durch eigenes Erleben der Schüler einer Lerngruppe ausgegangen werden, diesbezüglich sind diese Gruppen heute heterogener als vor der Reform.
Bei der Isolierung des Faches Mathematik könnte Rückgriff auf durch andere Unterrichtsfächer vermittelte Sachkenntnis nur durch strenge Koordination der Bildungsinhalte dieser Fächer und ständige Kooperation der betroffenen Fachlehrer erfolgen.
Solch fachübergreifender Mathematikunterricht ist zwar wünschenswert, in der Praxis aufgrund zusätzlicher Arbeitsbelastung für die betroffenen Lehrer und organisatorischer Schwierigkeiten allerdings selten realisierbar.

Die geringe Bedeutung, die Sachanalysen von Textaufgaben im Mathematikunterricht beigemessen wird, die Realitätsferne der Textaufgaben in Mathematikbüchern (36) und der Schematismus beim Lösen verhindern eher die Entwicklung problemorientierten Lösungsverhaltens beim Schüler statt es zu fördern (37).

Liest man Textaufgaben in derzeit gebräuchlichen Mathematikbüchern für das 7., 8. Schuljahr, so wird deutlich, welche untergeordnete Bedeutung der praktischen Anwendung der Mathematik in der Schule beigemessen wird (38).
Vergleicht man Mathematikbücher des vorigen Jahrhunderts mit heute gebräuchlichen, scheint es geradezu, als gäbe es eine Tradition der Phantasielosigkeit bei der Konstruktion, ja man kann sich des Verdachts nicht erwehren, als wären viele Aufgaben, modern aufgeputzt, übernommen worden.
Die Thematik ist weitgehend gleich, die Sachverhalte sind ausgetauscht: legte früher eine Kutsche eine bestimmte Strecke in einer bestimmten Zeit zurück, ist es heute ein Flugzeug, der Kaufmannsladen um die Ecke ist dem Supermarkt gewichen, der Fußgänger dem Autofahrer. Insgesamt schneiden die heutigen Textaufgaben beim Vergleich schlechter ab, sie erscheinen noch weniger realistisch, noch abstrakter und in dieser Form für den Schüler sicherlich wenig motivierend.
In derzeitigen Mathematikbüchern sind Aufgaben mit mathematischen Sachverhalten oder sogenannte "Zahlenrätsel" am häufigsten anzutreffen. Wird ein nichtmathematischer Sachverhalt beschrieben, erfolgt dies meist mit möglichst wenig Worten, in möglichst knapper Form.
Drei Beispiele mögen dies verdeutlichen:

1) "Ein Verkehrsflugzeug mit 420 km/h legt einen Weg in 55 Min. zurück. Wieviel Zeit braucht eine neuzeitliche Reisemaschine mit 850 km/h für diesen Weg?" (KUSCH/AITS, 1975, S.103);

2) "420 Frauen, das sind 65% der weiblichen Mitglieder eines Sportvereins, sind Aktive, ebenso 55% der männlichen Mitglieder. Insgesamt sind 62% aller Mitglieder aktiv. Wie viele Männer gehören dem Sportverein an?" (WINTER/ZIEGLER, 1972, S.49);

3) "Infolge einer Mieterhöhung von 15% hatte ein Gastwirt 1552,20 DM neue Miete zu zahlen. Wie hoch war die vorhergehende Miete?" (TRAEGER/UNGER/MEYER/VOGLER, 1974, S.77).

Diese wahllos herausgegriffenen Aufgaben sprechen für sich. Wäre es für einen Schüler nicht auch interessant zu wissen, welche Strecke das unter 1) erwähnte Flugzeug zurücklegt? Fliegt es von Rom nach Frankfurt, von Frankfurt nach Berlin oder Paris? Um welchen Flugzeugtyp handelt es sich, gibt es vielleicht noch schnellere Flugzeuge?
Die in den zitierten Aufgaben anzutreffenden reduzierten Sachverhaltsbeschreibungen sind weder geeignet, den Schüler zum Lösen anzuregen, noch sind es Sachverhaltsbeschreibungen, die die Reali-

tät nahebringen, sondern grob kaschierte Rechenaufgaben, die ob ihrer Konstruktion die Anwendung mathematischer Strukturen zur Erschließung der Realität geradezu verhindern.

BREIDENBACH fordert, daß der Sachverhalt dem Kinde aus seinem Erleben heraus vertraut sei und lehnt daher eine Erörterung des Sachverhalts in der Schule ab (vgl. (34)).
Er begründet dies so:

> "Warum werden dann Textaufgaben in den Rechenbüchern nicht in einer breiteren Form gegeben? Die Antwort lautet: Wollten wir jede Textaufgabe zu einer längeren Geschichte ausspinnen, und diese abdrucken, so würden die Bücher zu dick und zu teuer. Auch muß sich das Kind an die knappe Form gewöhnen; denn sie besitzt ja bildenden Wert und kommt in dieser Form im Leben immer wieder vor." (BREIDENBACH, 1976, S.180).

Dem kann nicht zugestimmt werden, da hierdurch nahezu jegliche Übertragbarkeit der Mathematik auf die Realität ökonomischen Gründen geopfert wird. Sind es nicht gerade mathematische Geschichten, die viele Schüler zum Lesen, zur Reflexion und zum Lösen anregen?
Leider kann im Rahmen dieser Untersuchung dieser Aspekt nicht weiter verfolgt werden, dennoch sei zum Abschluß dieses Gedankengangs ein, wenn auch altes, Beispiel angeführt, wie Textaufgaben auch sein könnten:

> "Das Cap oder das Vorgebirge der guten Hoffnung wurde von dem Portugiesen Bartholomäus Diaz entdeckt, als er einen Weg zur See nach Ostindien suchte. Später legten die Holländer eine Colonie daselbst an, die ihnen im franz. Revolutionskriege von den Engländern entrissen wurde. Der Frieden von Amiens aber (1802) bestimmte den Hafen des Caps zu einem Freihafen für die den Frieden contrahirenden Nationen. Die Jahreszahl der Entdeckung des Caps und ihre Hälfte sind um 1059 kleiner, als ebendieselbe Jahreszahl sammt der Jahreszahl des Friedens von Amiens. In welchem Jahr wurde das Cap entdeckt?"
> (LAUTESCHLÄGER, 1834, S.37)

(Im Anhang findet man weitere Beispiele derartiger 'Rechengeschichten'.)

Mathematik ist ein wichtiges Instrument zum Verständnis der Umwelt und ihrer Strukturen. Ohne Kenntnis ihrer grundlegenden Elemente durch Sachanalysen kann Beschreibung und Erfassung der Umwelt durch mathematische Modelle kaum erfolgen, elementares Verständnis nicht zum Aufbau komplexer Strukturen herangezogen werden.
Mathematik muß, soll sie verstanden werden - und Freude machen - vom statu nascendi aufgebaut werden, sie muß im Schüler wachsen, von ihm neu erfunden werden.
Solch genetische Methode

> "... sucht aus dem Anschauen der noch möglichst ursprünglichen, noch nicht mathematisierten Wirklichkeit, zum Staunen herauszufordern und damit zum Denken, zum Entdekken der Fragen und der Ordnungen, die sie lösen, seien es nun längst bekannte oder moderne Ordnungen."
> (WAGENSCHEIN, 1970, S.148)

2.3. Befunde empirischer Untersuchungen zum Lösen von Textaufgaben

Wie bereits früher erwähnt, sind Aussagen über Mathematisierungsprozesse, als Interpretationen mit kognitionspsychologischen Untersuchungsinstrumenten gewonnener Ergebnisse weitgehend hypothetisch. Die Validität solcher Hypothesen kann zwar durch Kombination mehrerer Untersuchungsinstrumente erhöht werden, der hypothetische Charakter bleibt indes erhalten.

Der hypothetische Charakter der Schlußfolgerungen wird in den hier aufgeführten Befunden allerdings nur selten erwähnt. Gravierender erscheinen jedoch die häufig ungenauen oder mitunter gar fehlenden Angaben der Autoren zur Anwendung der Untersuchungsinstrumente. Die Vergleichbarkeit ihrer Befunde ist daher (selbst wenn man Objektivität der Versuchsleiter voraussetzt) häufig eingeschränkt. Wenig Beachtung wird der Aufgabenkomponente "Sachbezug" (39) und diesbezüglichen Löserpräkonzepten geschenkt. Fehlleistungen beim Lösen von Textaufgaben, die auf fehlendes Sachwissen zurückzuführen sind, werden hierdurch nicht erkannt oder pauschal einer allgemeinen Kategorie wie "mangelndes Aufgabenverständnis" zugeordnet.
Im folgenden werden einige Untersuchungsergebnisse mathematikdidaktischer Forschung zu Textaufgaben referiert.

1961/62 untersuchten LOMPSCHER/STAHL das Lösungsverhalten von 120 Schülern (3., 4. und 6. Schuljahr) beim Lösen arithmetischer Textaufgaben. Als wesentlich stellten die Autoren folgende Ergebnisse heraus:

- statt eingehender Aufgabenanalysen

> "fanden Analyse und Synthese ... auf einem relativ flachen oberflächlichem Niveau" (1962, S.16)

statt (40).

> "Bei einem Teil der Vpn ist das Manipulieren mit Zahlen Ausdruck eines völlig blinden gedankenlosen Ratens." (S.17)

Bei anderen Versuchspersonen stellten LOMPSCHER/STAHL hingegen fest, daß diese durch Zahlenmanipulationen tiefer in die Zusammenhänge der Aufgabe eindrangen (41).

- Begründungen für Operationen erwiesen sich nach der Durchführung leichter als vorher.

- Schwierigkeiten traten beim Erfassen von Kausalbeziehungen und bei der Vorausplanung der Lösungsschritte auf.

- Die Analyse fiel den Schülern leichter als die Synthese (42).

Abgesehen von der doch recht massiven Beeinflussung der Schüler durch die verwendete Untersuchungsmethode (43) und damit verbundenen Zweifeln an der Objektivität der Ergebnisse, bleibt die wesentliche Frage nach den Ursachen der Fehlleistungen unbeantwortet.

Bei SCHLAAK (1968) werden Fehler bei der Bearbeitung von Textaufgaben u.a. auf fehlerhafte Textauffassung und Zielanalyse, mangelnde Merkleistung und ungenügendes Verständnis des Kausalzusammenhangs zurückgeführt.

KOBES wies 1975 anhand einer Untersuchung über Textaufgaben mit 142 Probanden nach, daß Übersetzungsleistungen beim Lösen von Aufgaben, in denen nur mathematische Objekte und Operatoren verwandt wurden, signifikant besser waren als jene, bei denen eine Zuordnung der Textsegmente zu Gleichungssegmenten erst nach einer vorherigen Codierung erfolgen konnte (1975, S.16 ff).

Dieser Befund wird durch Ergebnisse von E. und M. DREHER (1976, S.166 ff) gestützt, die Schwierigkeiten bei Schülern und Studenten bei der Umsetzung der von ihnen verwendeten Dimensionen Arbeitszeit/Pause, Uhrzeit/Zeitdauer in entsprechende mathematische Operationen konstatierten.

Übersetzungsproblemen gingen PAIGE/SIMON bereits 1966 nach. Sie untersuchten kognitive Prozesse an einer sehr heterogenen Stichprobe beim Lösen algebraischer Wortprobleme und verglichen ihre Befunde mit einem als STUDENT bezeichneten Computerprogramm, das 1964 von BOBROW entwickelt wurde (44).
Alle von ihnen verwendeten Aufgaben konnten mit einer einfachen linearen Gleichung mit einer Variablen gelöst werden. Als Untersuchungsmethode wurde die Methode des LAUTEN DENKENS angewandt, bei der die Versuchsleiter alle Schritte protokollierten, die Probanden hingegen keine Aufzeichnungen machten.
Folgende Ergebnisse können bündig festgehalten werden:

- Bei einfachen Aufgaben (45) erfolgten direkte syntaktische Übersetzungen und Konstruktionen einfacher linearer Gleichungen (wie beim Computerprogramm) oder durch

> "... working backward from end to beginning, performing arithmetic operations sequentially, and holding the partial answer in memory." (PAIGE/SIMON, 1966, S.51)

- Bei komplexeren Aufgaben genügten die einfachen syntaktischen Transformationen zur Aufgabenlösung nicht, es mußten zusätzliche Informationen herangezogen werden (über die das STUDENT-Programm nicht verfügte).
  Probanden, die direkt syntaktisch übersetzten, scheiterten häufig an der gestellten Aufgabe (46):

> "In a number of situations, the behavior of the subjects gives evidence that they are using stored substantive information that goes beyond the definitional equations ..." (S.85).

Direktübersetzende Pbn übersahen auch implizit im Text enthaltene Widersprüche (47) und gelangten, ohne dies zu bemerken, zu unsinnigen physikalischen Beziehungen:

> "Since the problem statements themselves were not literally contradictory (in each case an equation could be written that accurately translated the statement), the contradictions the subjects detect must depend on additional premises imported into the problem through the auxiliary representations." (S.99).

Diese "auxiliary representations" können extern oder intern in Form einer Skizze oder einer Vorstellung erfolgen:

> "We suppose (...) that the subject constructs an internal representation of the problem situation from the problem statement."(S.105).

KANE und NESHER entnimmt man Komponenten zu Schwierigkeiten beim direkten syntaktischen Transfer.

KANE (1970, S.59 ff) weist auf den unterschiedlichen Gebrauch von Wörtern im "ordinary English" (OE) und "mathematical English" (ME) hin. "If" hat verschiedene semantische Belegungen im OE, jedoch wird es im ME in Kompositionen wie "if an only if", "if ... then" völlig abweichend gebraucht.

> "Their precise meanings must be comprehended by the reader before he can hope to assign the author's intended meaning to the passage in which they occur." (S.579)

NESHER/TEUBAL (1975, S.43 ff) zeigten in Detailuntersuchungen zu direkten syntaktischen Übersetzungen, daß bei der Übersetzung umgangssprachlicher, mit mehreren Belegungen verwendeter Schlüsselwörter, Fehldeutungen bei der Reduktion auf den mathematischen Kontext auftraten (48).

Dieser Befund wurde durch Untersuchungen von NESHER/KATRIEL (1977, S.251 ff) bestätigt. Sie zeigten, daß Verben, die umgangssprachlich mit Additions- (find, buy, bring, win, etc.) oder Subtraktionsvorstellungen (lose, give, sell, send, etc.) verbunden sind, im mathematischen Kontext mitunter die entgegengesetzte Operation erfordern und Anlaß für Schülerfehler sind. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen:

> "Problem 16:
> 30 cars entered the port and 20 cars left the port.
> How many cars passed through the gate?
> Since entering and leaving are reversed in direction, and since both occur in the information component, the

> problem seems to call for subtraction. However is indicated by the question component, that it is in fact an additional problem ... " (S.266)

Somit wird hier eine "Filterwirkung" (49) durch häufig gebrauchte sprachliche Präkonzepte sichtbar, durch die die Anwendung anderer Konzepte geradezu blockiert wird (50).

Ähnliche Befunde sind bei PIPPIG (1977, S.40) wiedergegeben. PIPPIG teilt als Hauptfehlerursachen mit:

- Außerachtlassen wesentlicher explizit oder implizit enthaltener Bedingungen,
- Einführung subjektiver zusätzlicher Bedingungen,
- Anwendung von Analogien, die auf früheren Lösungserfolgen basieren,
- unreflektierte Verwendung früher erfolgreicher Operationen.

MAIER/SCHUBERT (1978) referieren Befunde bei Untersuchungen über Textrechnungen (51):

1. Aufgaben mit linearen Simplexen wurden besser gelöst als Aufgaben mit verzweigten Simplexen, wobei der Bearbeitungserfolg mit wachsender Simplexzahl abnahm.
2. Textrechnungen mit hohen rechnerischen Anforderungen wiesen geringere Bearbeitungserfolge auf als Aufgaben mit leicht überschaubarem Zahlenmaterial.
3. Auf schulisches Leben bezogene Textrechnungen zeitigten bessere Erfolge als Textrechnungen aus der engeren Umwelt der Schüler oder einem wissenschaftlichen Sachfeld. Aufgaben aus der engeren Umwelt wurden mit zunehmendem Schüleralter besser gelöst.
4. Für die Datenfolge konnte die Hypothese:

   > "Der Bearbeitungserfolg von Textrechnungen unterscheidet sich je nach dem, ob die Datenfolge im Aufgabentext einem naheliegenden bzw. möglichen Bearbeitungsplan entspricht oder nicht entspricht." (S.41)

   überraschenderweise nicht bestätigt werden (52).
5. Nach den ermittelten Untersuchungsdaten lösten Probanden Aufgaben mit Fragen besser als Textrechnungen ohne Fragestellung.

   Dieses Ergebnis ist jedoch weitgehend hypothetisch, da die hierbei untersuchten Gruppen wegen vernachlässigter Untersuchungsvoraussetzungen nicht miteinander verglichen werden können.
6. Die "gute" sprachliche Gestaltung von Textrechnungen (53) beeinflußte den Lösungsverlauf ebenso positiv, wie übersichtliche grafische Darstellungen.

Als Hauptfehlerquellen beim Lösen von Textrechnungen führen die Autoren

- mangelndes Verständnis des Sachbezuges,
- mangelndes Sprachverständnis,
- Rechenfehler

an und bestätigen somit bereits mitgeteilte Befunde.

RADATZ (1980, S.37 ff) referiert Fehlerursachen bei der Informationsaufnahme und -verarbeitung, von denen im folgenden für Textaufgaben relevante wiedergegeben werden:

a) Fehlerursachen im Sprach- und Textverständnis, die durch die Fülle der in Mathematikbüchern verwendeten Fachtermini (RADATZ nennt die Zahl 780 in Büchern für die Sekundarstufe I in einem Schuljahr) und die damit verbundenen Schwierigkeiten bei sprachlichen Transformationen noch verstärkt werden;

b) falsche Assoziationen und Einstellungen, die auf mangelnde Flexibilität bei der Informationsaufnahme und auf Festhalten an gewohnten Einstellungen zurückzuführen sind;

c) Fehler durch das Gebundensein von Begrifflichkeiten an sehr spezifische Repräsentationen, die durch verengtes Kennenlernen des Problems bedingt sind;

d) Nichberücksichtigung relevanter Aufgabenbedingungen;

e) Verlieren von Zwischenschritten im Lösungsprozeß;

f) Fehlerursachen bei Versuch-Irrtum-Strategien, die durch unzureichende Berücksichtigung aufgabenrelevanter Bedingungen besonders bei impulsiven Schülern anzutreffen sind;

g) nicht ausreichende Kenntnisse, Fertigkeiten und unzureichendes Begriffsverständnis für die Informationsverarbeitung.

Besonderes Unbehagen bereiten Einschätzungen früher Untersuchungen wie:

> "... blindes Raten und sinnloses Zahlenmanipulieren."

bei LOMPSCHER/STAHL (1962, S.17) oder

> "We had before us a clear model of searching for the solution by the blind method of trial and error, manipulation of numerical data, ..."

bei KALMYKOVA (1955, S.103) anläßlich der Analyse des Lösungsprozesses des Schülers Petya.

Solche Einschätzungen widersprechen Praxiserfahrungen und sind nach neueren Untersuchungen nicht mehr haltbar. Die von PAIGE/SIMON, NESHER u.a. mitgeteilten Untersuchungsergebnisse deuten darauf hin, daß erfolgreiches Lösen von Textaufgaben wesentlich von individuellen Vorerfahrungen und somit intern verfügbaren Präkonzepten der Löser abhängt.
Mit der Informationsaufnahme werden interne Assoziationsmuster aktiviert, die je nach Vorerfahrung mehr oder minder verzweigt sein können. "Raten", "Zahlenmanipulationen" sind äußere Anzei-

chen interner Such-Finde-Prozesse, geistiger Aktivitäten, die, läßt man die psychische Verfassung eines Schülers bei derartigen Untersuchungen außer acht, bei impulsiven Schülern schneller und häufiger als bei reflexiven sichtbar werden (54).

2.4. Diskussionen der Befunde und Folgerungen

Nach den hier referierten Befunden erscheinen als wesentlichste Komponenten für erfolgreiches Lösen von Textaufgaben: der sprachliche, der mathematische und der sachliche Aspekt. Während zum sprachlichen und mathematischen Aspekt hinreichend Erkenntnisse vorliegen, sind Befunde zum sachlichen Aspekt eher marginal. Dies mag zum einen auf die geringe Bedeutung, die man diesem Gesichtspunkt beimißt, zum anderen auf dessen Komplexität, die geringe Kontrollierbarkeit und unzureichende Untersuchungsinstrumente zurückzuführen sein.

Generell sind beim Aufgabenlösen Anforderungen durch Aufgaben an den Löser von Kenntnissen des Lösers bezüglich der Aufgaben zu unterscheiden.
Die Anforderungen *verschiedener* Aufgaben an *einen* Löser können durch unterschiedliche Ausprägung der Form und zwar der

sprachlichen (Gebrauch der Umgangssprache, Gebrauch von Fremdwörtern, kurze Sätze, etc.),

mathematischen (Lösung durch einfache Addition, Lösung durch quadratische Gleichung, etc.) und

sachlichen (Sachbezug Schulweg, Sachbezug Unfallstatistik, etc.)

Form variieren. In gleicher Weise gilt dies für den entsprechenden Kenntnisstand *verschiedener* Löser bezüglich *einer* Aufgabe. Daher wird im folgenden stets von Aufgaben- bzw. Löservariablen gesprochen. Die Lösungskomponenten setzen sich jeweils aus Aufgaben- und Löservariablen zusammen, erforderlichenfalls kann eine weitere Differenzierung der Variablen in ihre Elemente, die als Subvariablen anzusehen sind, vorgenommen werden.

Nach den vorliegenden Befunden sind der sprachlichen Komponente als Elemente der Aufgabenvariablen Anzahl und Art der verwendeten Termini, Anzahl der sprachlichen Relationen; der Löservariablen individuelle sprachliche Erfahrung des Lösers (Begriffsverständnis, Assoziierfähigkeit, etc.) zuzuordnen.

Die mathematische Komponente setzt sich zusammen aus der Aufgabenvariablen mathematische Anforderungen durch die Aufgabe und der Löservariablen mathematische Kenntnisse des Lösers.

Gäbe es auf der Seite der Aufgabenvariablen Befunde zur Sachvariablen, ließen sich Aufgaben- und Löservariablen vollständig gegenüberstellen. Dies ist jedoch in den referierten Befunden nicht der Fall. Für die Sachkomponente wird lediglich die Löservariable Sachkenntnis angegeben, ihr wird hier die Aufgabenvariable Sachbezug gegenübergestellt.

Somit sind beim Lösen von Textaufgaben die

Löservariablen: sprachliche Kenntnisse (LVSP),
Sachkenntnisse (LVSA),
mathematische Kenntnisse (LVM),

sowie die

Aufgabenvariablen: sprachliche Anforderungen (AVSP),
Sachbezug (AVSA),
mathematische Anforderungen (AVM)

bedeutsam.

Stellt man Aufgaben- und Löservariablen gegenüber, lassen sich die Ursachen für das Scheitern beim Lösen von Textaufgaben durch Nichtübereinstimmung der entsprechenden Variablen verdeutlichen. Das Wirksamwerden der Variablen (nicht jedoch deren Ausprägung) wird durch die Reihenfolge der sprachlichen, sachlichen und mathematischen Komponenten bedingt: Der Zugang zum Sachverhalt erfolgt über den Text, erst nach Klärung des Sachverhalts ist eine formal mathematische Darstellung möglich.
Somit sind beim Scheitern des Lösers durch Nichtübereinstimmung der jeweiligen Aufgaben- und Löservariablen folgende Fälle zu unterscheiden (vgl. Abb. 2):

1. Übersteigen die sprachlichen Anforderungen durch die Textaufgabe die Sprachkenntnisse des Lösers, treten sprachliche Blokkaden auf, der Text wird nicht verstanden, sachliche und mathematische Komponenten werden nicht wirksam (Abb. 2:(1)).
2. Genügen die Sprachkenntnisse des Lösers den sprachlichen Anforderungen, so kann durch fehlende Sachkenntnis des Lösers eine sachliche Blockade auftreten, die Aufgabe wird unlösbar, die mathematische Komponente nicht wirksam (Abb. 2:(2),(3)).
3. Bei unzureichenden mathematischen Kenntnissen des Lösers, ausreichende Sprach- und Sachkenntnisse vorausgesetzt, ist eine mathematische Lösung nicht möglich, es tritt eine mathematische Blockade auf (Abb. 2: (4), (5), (6), (7)).

Textaufgaben sind demnach genau dann lösbar, wenn den Aufgabenvariablen gleich große oder größere Löservariablen gegenüberstehen.

Wie die vorliegenden Befunde besonders zur Wirkung von Schlüsselwörtern zeigen, können aus bestimmten sprachlichen Wendungen falsche Sachvorstellungen und hieraus falsche mathematische Operationen folgen. Mangelnde Sprachkenntnisse des Lösers werden hier als Fehlerursache diagnostiziert.
Schwieriger erscheint allerdings die Diagnose, wenn beim Löser sachliche oder mathematische Blockaden auftreten, die er durch Anwendung intern verfügbarer sprachlicher Assoziationen zu beheben versucht. Durch Sichtbarwerden hierbei entstehender Fehlkonzepte könnte der Eindruck falscher semantischer Transformationen hervorgerufen werden und zum Urteil "mangelnde Sprachkenntnis" führen. (Inwieweit derartige Fehlbefunde in die vorliegenden Untersuchungsergebnisse einflossen, ist allerdings schwer abschätzbar.) In diesem Falle werden mangelnde sachliche oder mathematische Kenntnisse durch die zentrale sprachliche Variable überdeckt.

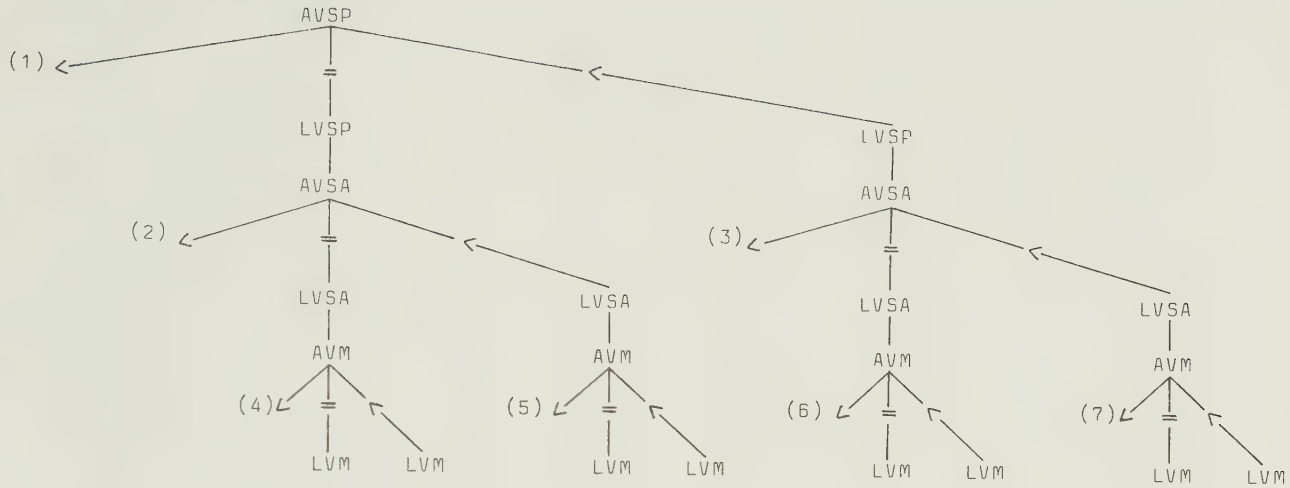


Abb.2

AVSP: Aufgabenvariable sprachliche Anforderungen
LVSP: Löservariable sprachliche Kenntnisse
AVSA: Aufgabenvariable Sachbezug
LVSA: Löservariable Sachkenntnis
AVM: Aufgabenvariable mathematische Anforderungen
LVM: Löservariable mathematische Kenntnisse

Zustände zwischen den Variablen:
—‖—: gleich
—>—: größer
—<—: kleiner

II. TEIL

Die Durchführung eigener Experimente erforderte die Entwicklung geeigneter Untersuchungsinstrumente. Dies setzte zunächst eine genauere Analyse der Aufgaben- und Löservariablen, ihres Einflusses auf den Lösungsprozeß, dessen modellhafte Beschreibung sowie die Isolierung erforderlicher Mathematisierungen voraus.

Das Untersuchungsinstrument wurde durch die Entwicklung standardisierter Lösungsverfahren zu den jeweiligen Textaufgaben gewonnen, durch die Einzelschritte der Lösungsprozesse der Schüler im Vergleich identifizierbar wurden und so dem Prozeßmodell zugeordnet werden konnten.
Zur Gewinnung von Entscheidungskriterien für Anlage und Durchführung der Untersuchung diente zunächst eine Erkundungsstudie in einer siebten Realschulklasse.
An der Hauptuntersuchung, die fünf Monate später durchgeführt wurde, beteiligte sich eine zufällige Auswahl aus dieser Lerngruppe.

Die Untersuchung gliedert sich somit in fünf Phasen:

- Generierung von Aufgaben- und Löservariablen zur Entwicklung eines Lösungsmodells zum Lösen von Textaufgaben,
- Überprüfung dieses Modells in einer Erkundungsstudie,
- Hypothesengenerierung zur Hauptstudie,
- Durchführung und Auswertung der Hauptstudie und Analyse der gewonnenen Daten,
- Diskussion der Befunde und Aufzeigen von Konsequenzen für die unterrichtliche Behandlung von Textaufgaben.

3. MATHEMATISIERUNGSPROZESSE BEIM LÖSEN VON TEXTAUFGABEN

Ausgehend von den Überlegungen in Abschnitt 2.4. werden in diesem Kapitel zunächst sprachliche, sachliche und mathematische Komponenten des Lösungsprozesses bei Textaufgaben explizit dargestellt, wobei Erörterungen zur sprachlichen Komponente im Mittelpunkt stehen. Sie bilden die Grundlage der anschließenden Entwicklung eines semantischen Vierebenenmodells, an dem die zur Lösung erforderlichen semantischen Transformationen expliziert werden.
Anknüpfend an frühere Ausführungen zum mathematischen Problemlösen, wird sodann ein theoretisches Modell des Lösungsprozesses entwickelt und hierzu erforderliche Mathematisierungen beschrieben. Abschließend folgt die Entwicklung eines Untersuchungsinstruments zur Analyse realer Lösungsprozesse sowie die exemplarische Anwendung des Prozeßmodells auf eine Textaufgabe (55).

3.1. Komponenten des Lösungsprozesses

Im folgenden Abschnitt werden Aufgaben- und Lösevariablen präzisiert und Elemente der Lösevariablen, deren Subvariablen, ermittelt. Als Hilfsgrößen werden mittlere sprachliche, sachliche und mathematische Kompetenzen der Lerngruppe, der der Löser angehört, postuliert und hierzu Aufgaben- und Lösevariablen als sich wechselseitig normierende Abstände definiert (56). Übereinstimmungen der Variablen werden als *Kongruenzen* bezeichnet, sprachliche, sachliche und mathematische Kongruenzen sind Voraussetzungen für erfolgreiches Aufgabenlösen (57).

3.1.1. Semantische Kongruenz

Beschreibung und Definition der sprachlichen Komponente bei Textaufgaben erfordern zunächst eine allgemeine Darstellung sprachwissenschaftlicher Begriffe. Zunächst sollen daher die Begriffe STANDARDSPRACHE, UMGANGSSPRACHE und FACHSPRACHE erläutert und aus ihnen der Begriff *mathematische Unterrichtssprache* abgeleitet werden.

STANDARDSPRACHE (Hochsprache) ist eine der zahlreichen Subsprachen der deutschen Sprache, die überregional als Sprache eines Großteils der Gebildeten gebräuchlich ist und der sozialen Ober- und Mittelschicht als Schriftsprache dient.
UMGANGSSPRACHE bezeichnet nichtschichtenspezifisches Wechselgespräch beim persönlichen Kontakt innerhalb oder zwischen Gruppen. Bei der Kommunikation zwischen Gruppen werden meist Sprachformen sogenannter angesehener Gruppen verwendet, deren Geltungsbereich damit über den der Kleingruppen hinausgeht (BICHEL, 1973, S.275 ff).
FACHSPRACHEN dienen der Kommunikation in wissenschaftlichen und technischen Gemeinschaften. Sie zeichnen sich durch weitgehende Beschränkung von Handlungsteilen, Formalisierungen und Normierungen der Teminologie zu möglichst genauer Informationsvermittlung aus, wobei spezielle Lexiken mit fachspezifischen Fremdwörtern benutzt werden. V. HAHN nennt Theorie- oder Wissenschaftssprache als mindestens unterscheidbare Schichten der Fachsprache, wobei die Theoriesprache als Abstraktion fachlicher Umgangssprache als strengste Form anzusehen ist.
Theoriesprache dient der schriftlichen Beschreibung fachlicher Inhalte. Der hierbei verwendete Wortschatz setzt sich vielfach aus Fremdwörtern, der Standard- oder Umgangssprache entnommenen Termini und aus Wortkonstrukten, die durch ungebräuchliche Zusammenfügung von Wörtern oder Silben entstehen, zusammen (v. HAHN, 1973, S.283 ff).
Bedeutsam erscheint das Fehlen der konnotativen Bedeutung der Fachwörter, die dem nicht fachkundigen Leser, der die gelesenen Wörter mit üblicher konnotativer Ladung belegt, den Zugang zum Verständnis erschwert oder gänzlich verschließt (MÖHN, 1968, S.315 ff). Die Isolation der Fachsprachen wird hierdurch verstärkt, ihre Abstraktheit nur "Fachgenossen" verständlich. Sie verwenden in sprachlicher Kommunikation einen besonderen "Fachjargon", in dem umgangssprachliche Elemente enthalten sind (v. HAHN, 1973, S.283 ff).

Die mathematische Fachsprache ist geradezu Paradebeispiel einer Fachsprache. Sie zeichnet sich durch eine Vielzahl von Fachtermini, stringente Syntax sowie die Verwendung standardsprachlicher Termini ohne konnotative Bedeutung aus (58). Hierdurch ist es möglich, mathematischen Begriffen Symbole und Zeichen zuzuordnen (die damit quasi zu Ladungen fachsprachlicher Begriffe werden) und so mathematische Sachverhalte eindeutig zu beschreiben. Das mathematische Symbolsystem kann so als mehr oder minder eindeutige Abbildung mathematischer Fachsprache und somit als Subsprache mathematischer Fachsprache interpretiert werden (59).

Die Sprache des Individuums, sein *Idiolekt* (kurz IL), umfaßt sein individuelles sprachliches System und seine sprachlichen Äußerungen. Der Idiolekt ist Grundlage jeder sprachlichen Kommunikation. Idiolektale Äußerungen rufen Evokationen hervor, die durch individuelle Ausprägung des Wortschatzes, der Syntax und der Begriffsnuancen der Kommunikationspartner differieren (60).

Nun gehört jedes Individuum verschiedenen sozialen Gruppen an, die durch bestimmte Eigenheiten eine Sprachgemeinschaft bilden. Durch wechselseitige Kommunikation der Gruppenmitglieder wird sowohl deren Idiolekt, als auch das Sprachverhalten der Gruppe, deren *Soziolekt*, beeinflußt. Die Prägung des Individuums durch den Soziolekt kann außerhalb der Gruppe als sekundäres idiolektales Merkmal fungieren.
Wendet man diese Überlegung auf das sprachliche Kommunikationsfeld Schule an und betrachtet hierbei nur Kommunikationsbedingungen des Individuums Schüler im Bereich Unterricht, so sind mindestens zwei Gesichtspunkte bedeutsam:

- das Individuum Schüler nimmt aufgrund des Lehrplans am Unterricht in verschiedenen Fächern teil und ist hierbei
- häufig Mitglied einer jeweils anders strukturierten Lerngruppe, deren Zusammensetzung je nach fachspezifischen, schulorganisatorischen, u.a. Bedingungen wechseln kann.

Hieraus folgt, daß sprachliche Kommunikation und damit Wissensvermittlung in diesen Lerngruppen nur dann erfolgreich sein kann, wenn hierbei den idiolektalen Eigenheiten des einzelnen Schülers, den soziolektalen Eigenheiten der Lerngruppe, den sprachlichen Besonderheiten des Unterrichtsfachs und der idiolektalen Prägung des Unterrichtenden adäquat Rechnung getragen wird. Mit dem Soziolekt *Unterrichtssprache* versucht der Unterrichtende diesen Bedingungen gerecht zu werden - je nach Ausprägung der einzelnen Faktoren kann dieser Soziolekt etwa fachsprachlichen, umgangssprachlichen oder dialektalen Charakter haben. Jeder Unterrichtssoziolekt ist vom anderen verschieden (sowohl fachspezifisch wie fachintern), so wie sich die Unterrichtenden als Träger der Soziolekte voneinander unterscheiden.

Der Soziolekt *mathematische Unterrichtssprache* (kurz MUS), kann als Grundlage mathematischer Begriffsbildungsprozesse angesehen werden (61). Er ist für den Schüler mathematische Fachsprache, von der der Zugang zum mathematischen Symbolsystem, der *mathematischen Symbolsprache* (kurz MSS), erfolgt.

Die Schwierigkeiten, denen sich Autoren von Textaufgaben gegenüber sehen, bestehen im adäquaten Transfer mathematischer Inhalte aus fachsprachlichen in standard- oder umgangssprachliche Kontexte: einerseits darf die Eindeutigkeit mathematischer Sachverhalte nicht verloren gehen, andererseits müssen die Texte sprachlich so einfach und verständlich wie möglich konstruiert und überregional verständlich sein. In Textaufgaben wird daher durchgängig Standardsprache benutzt, in die fachsprachliche, mitunter auch umgangssprachliche Termini und Wendungen einfließen. Somit bildet dieses Konglomerat verschiedener Sprachformen eine Subsprache mit dem speziellen Adressatenkreis Schüler, deren Variationsbreite von mathematischer Fachsprache bis zur Umgangssprache reicht (62). Bedeutsam erscheint die Isoliertheit dieser Subsprache: sie wird weder bei sprachlichen Kommunikationsprozessen in der Umgangssprache, fachmathematischer Umgangssprache, noch in der Standardsprache benutzt und liegt ausschließlich in Schriftform vor. Im folgenden wird diese subsprachliche Kunstform als *mathematische Textsprache* (kurz MTS) bezeichnet (63).

Beim Lösen von Textaufgaben sind somit mindestens die sprachlichen Varianten zu berücksichtigen:
- mathematische Textsprache (MTS) als Ausprägung der Aufgabenvariablen *sprachliche Anforderungen (AVSP)* auf der Aufgabenseite
- mathematische Unterrichtssprache (MUS) und Löseridiolekt (IL) auf der Löserseite.

Gelingt es, im Lösungsprozeß Übereinstimmung der diesen Varianten eigenen Begriffsmuster herzustellen, wird *semantische Kongruenz* erreicht (vgl. Abschnitt 3.2.1.).
Zur Bestimmung der Löservariablen *LVSP*, der *sprachlichen Kenntnis* des Lösers, müssen dessen idiolektale Prägung durch Repertoire und Anwendung umgangssprachlicher Begriffe, sowie seine durch Repertoire und Anwendung MUS-sprachlicher Begriffe bedingte MUS-Kompetenz als gesonderte Elemente berücksichtigt werden (64).
Setzt man MUS als mathematische Sprachnorm für die Lerngruppe, der der Löser angehört, voraus, können MUS-Kompetenz des Lösers und MUS-Anforderungen durch die Textaufgabe (als Teil der Ausprägung der Varianten MTS), als Sprachabstände zu dieser Norm definiert und hieraus der Grad der Übereinstimmung zwischen Löserkenntnissen und Aufgabenanforderungen wiederum als Abstand ermittelt werden.
Eine der MUS entsprechende Bezugsnorm zur umgangssprachlichen idiolektalen Ausprägung des Lösers könnte durch Bestimmung einer mittleren Sprachkompetenz der Lerngruppe gewonnen werden und hieraus die umgangssprachliche Dimension der Löservariablen im Vergleich zur Aufgabenanforderung ebenfalls als Sprachabstand bestimmt werden.

In Abschnitt 2.4. wurden sprachliche Anforderungen in Textaufgaben als Aufgabenvariable (AVSP), sprachliche Kenntnisse des Lösers als Löservariable (LVSP) eingeführt. Nach den nun geschaffenen Voraussetzungen lassen sich diese Bezeichnungen wie folgt rechtfertigen:
Löst *ein* Schüler *eine* Aufgabe, läßt sich der Sprachabstand zwischen sprachlichen Anforderungen und sprachlichen Fähigkeiten als fixe Größe ermitteln. Löst dieser Schüler *mehrere* Aufgaben -

unterschiedliche sprachliche Anforderungen vorausgesetzt - geraten die Größen zur Variablen AVSP. Lösen hingegen *mehrere* Schüler einer Lerngruppe die gleiche Aufgabe, geraten die Sprachabstände zur Variablen LVSP. Die Komplexität nimmt zu, wenn *mehrere* Schüler *mehrere* Aufgaben unterschiedlicher sprachlicher Anforderungen lösen, AVSP und LVSP normieren sich dann wechselseitig (65).

3.1.2. Sachkongruenz

Als zweites wesentliches Kriterium beim Lösen von Textaufgaben ist die Bedingung anzusehen, der in der Aufgabe beschriebene Sachverhalt müsse dem Löser hinreichend vertraut sein. Auf die Bedeutung der Sachkomponenten wurde bereits im Abschnitt 2.2. verwiesen, so daß hier lediglich eine Beschreibung der Variablen erfolgt.
Die Löservariable *Sachkenntnis (LVSA)* setzt sich aus den Subvariablen

- Sachkenntnisse durch schulische Sachfächer,
- Sachkenntnisse durch Sacherfahrungen in nichtschulischen Gemeinschaften,
- Sachkenntnisse durch Eigenerfahrungen

zusammen.
Aufgrund der Individualerfahrungen kann die Ausprägung der beiden letztgenannten Subvariablen (durch den Umfang des hier erworbenen Sachwissens) von Löser zu Löser in weitaus stärkerem Maße variieren, als dies bei sprachlichen oder mathematischen Subvariablen der Fall ist. Es erscheint daher nicht unbedenklich, die mittlere Schkompetenz einer Lerngruppe über ein Mindestmaß voraussetzbaren Sachwissens ermitteln zu wollen, hierzu wird nur die Subvariable "Sachkenntnisse durch schulische Erfahrungen" als geeignet angesehen.
Die Sachkompetenz des Lösers ist nunmehr als Abstand zur mittleren Sachkompetenz der Lerngruppe, der er angehört, ebenso meßbar, wie die Anforderungen durch die Textaufgabe an seine Sachkenntnisse. In gleicher Weise wie zuvor bei den Variablen zur Sprachkomponente, kann hier die Größe der Aufgabenvariablen *Sachbezug (AVSA)* ermittelt werden.
Der Abstand zwischen AVSA und LVSA kann als Grad der Vertrautheit des Lösers mit dem beschriebenen Sachverhalt interpretiert werden. Ist dieser Abstand Null, entsprechen die Sachkenntnisse des Lösers den Sachanforderungen der Aufgabe, es besteht *Sachkongruenz.*

3.1.3. Mathematische Kongruenz

In Textaufgaben als mehr oder minder komplexen verbalen Informationssystemen erfolgen Mitteilungen über bestimmte Sachverhalte (S). Die Darstellungen werden durch Textrelationen (TR), die nach bestimmten syntaktischen Regeln (sR) miteinander verknüpft sind, strukturiert:

$$sR_1(TR_1(S_1))sR_2(TR_2(S_2)) \ldots sR_r(TR_s(S_t))$$

Zur mathematischen Lösung ist es erforderlich, Textrelationen durch mathematische Funktionen (F), Sachverhalte durch mathematische Symbole (Z) zu ersetzen, sowie einen mathematischen Operator (OP) zu isolieren (1), sodann zu einem mathematischen Funktionengefüge zusammenzufassen (2) und durch Anwendung eines geeigneten Algorithmus die gewünschte mathematische Information zu gewinnen (3):

(1) $TR_1(S_1): \longrightarrow F_1(Z_1) := Z_1 \xrightarrow{OP_1} Z_2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$TR_s(S_t): \longrightarrow F_n(Z_m) := Z_m \xrightarrow{OP_q} Z_{m+1}$

(2) $F_n(F_{n-1}(\ldots (F_1(Z_1)) \ldots)) = Z_{m+1}$

(3) $Z_1 = F_1^{-1}(\ldots (F_{n-1}^{-1}(F_n^{-1}(Z_{m+1}))) \ldots)$

Eine mathematische Lösung der Textaufgabe kann nur dann erreicht werden, wenn (a) Lösbarkeit durch formalen Texttransfer gewährleistet ist und (unter dieser Prämisse) (b) zur mathematischen Lösung erforderliche Kenntnisse beim Löser disponibel sind.

Ad a) Die Überführung der Textaufgabe in die mathematische Symbolfom gelingt nur dann, wenn alle zur mathematischen Lösung erforderlichen Textrelationen transformierbar, d.h. alle erforderlichen Komponenten im Informationssystem Textaufgabe explizit oder implizit vorgegeben, formalmathematisch darstellbar und zu einem Funktionensystem obiger Form zusammenfügbar sind. Diese Lösbarkeitsbedingung wird nicht erfüllt, wenn erforderliche Textinformationen fehlen und auch aus der Sachkenntnis des Lösers heraus nicht ergänzbar sind. Bei mehrfachen, übereinstimmenden Informationen, kann geeignete Auswahl zum Ziel führen, im optimalen Falle besteht Übereinstimmung zwischen mathematisch notwendigen und im Text vorgegebenen Informationen.
Mathematische Lösbarkeit vorausgesetzt, läßt sich die Größe der Aufgabenvariablen *mathematische Anforderungen (AVM)* einer Textaufgabe als Abstand zum mittleren mathematischen Kenntnisstand einer Lerngruppe bestimmen.

Ad b) Zur erfolgreichen mathematischen Lösung muß der Löser zum einen über das Wissen um anwendbare mathematische Verfahren bei der Transformation der Textaufgabe in formalmathematische Funktionensysteme verfügen, zum anderen die zur Lösung dieser Systeme erforderlichen mathematischen Operationen erfolgreich durchführen können. Die Disponibilität des Lösers über zur Lösung erforderliche mathematische Verfahren wird somit bestimmt von den *mathematischen Fähigkeiten* und *Fertigkeiten* des Lösers:
mathematische Fähigkeiten insofern, als der Löser über das Wissen um anwendbare Verfahren verfügt,
mathematische Fertigkeiten insofern, als der Löser die bei

Anwendung dieser Verfahren erforderlichen Rechnungen formal richtig durchzuführen vermag.

Mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten werden hier als Subvariablen der Löservariablen *mathematische Kenntnisse (LVM)* zugeordnet, die Größe dieser Variablen ist nach Ermittlung der mittleren mathematischen Kompetenz der Lerngruppe, der der Löser angehört, als Bezugsnorm bestimmbar.

Nach Bestimmung dieser Bezugsnorm ist der Abstand der Variablen AVM und LVM meßbar. Wie die übrigen Aufgaben- und Löservariablen normieren sich AVM und LVM wechselseitig. Stimmen sie überein, übersteigen die mathematischen Anforderungen demnach nicht die die Aufgabe betreffenden Kenntnisse des Lösers, herrscht *mathematische Kongruenz.*

3.2. Entwicklung eines Mathematisierungsmodells zum Lösen von Textaufgaben

Im folgenden Abschnitt wird ein eigenes Modell zum Lösungsprozeß bei Textaufgaben entwickelt. Wegen der grundlegenden Bedeutung der sprachlichen Komponente im Lösungsprozeß ist zunächst eine gesonderte Darstellung der einzelnen Texttransformationen erforderlich, an die sich sodann eine explizite Beschreibung der Einzelphasen des Prozesses anschließt.

3.2.1. Entwicklung eines semantischen Vierebenenmodells

Beim mathematischen Problemlösen erfolgt zunächst durch zwei aufeinanderfolgende Codierungen eine sprachliche Transformation des Problemkontextes in mathematische Symbole und Zeichen, sodann mathematisches Lösen und anschließendes zweifaches Decodieren des gewonnenen Operators sowie dessen Übertragung auf den textsprachlichen Problemkontext (vgl. Abschnitt 1.3.).
Überträgt man dieses Modell zunächst unter Außerachtlassen des Lösers und seiner sprachlichen Besonderheiten auf das Lösen von Textaufgaben, so läßt es sich wie folgt anwenden.

Nach der Darstellung des Soziolekts MUS als löserbezogene mathematische Fachsprache, erfolgt Codierung der Textaufgabe zunächst in MUS. Dieser Soziolekt wird somit zur Ausgangssprache der folgenden Codierung in MSS. Nach erfolgtem mathematischen Aufgabenlösen, Ermittlung des mathematischen Operators, dessen Decodierung in MUS, folgt schließlich dessen Übertragung auf den Aufgabenkontext.

Bezieht man nun den Löser und dessen individuelle sprachlichen Besonderheiten in dieses Gefüge ein, so müssen dessen individuelle sprachlichen Erfahrungen, die Ausprägung seines Idiolekts, als Verstehensgrundlage berücksichtigt werden. Dies bedeutet jedoch, daß der Löser die textsprachlich vorliegende Aufgabe zunächst in sein Idiolekt transformiert bevor eine Codierung in MUS stattfindet und der Operator, bevor eine Anwendung auf den Aufgabentext erfolgt, ebenfalls zuvor auf den Löseridiolekt trans-

formiert werden muß.

Die im Lösungsprozeß erforderlichen semantischen Transformationen lassen sich nunmehr wie folgt darstellen:

- Transformation von MTS zu IL Decodierung 1,
- Transformation von IL zu MUS Codierung 1,
- Transformation von MUS zu MSS Codierung 2,
- Operieren in MSS durch mathematisches Aufgabenlösen zur Ermittlung des mathematischen Operators,
- Transformation von MSS zu MUS Decodierung 2,
- Transformation von MUS zu IL Decodierung 3,
- Transformation von IL zu MTS Codierung 3.

Diese Abfolge und die hierbei erforderlichen Mathematisierungen (De-/Codierungen) können an einem semantischen *Vierebenenmodell* verdeutlicht werden (Abb.3). Hierzu werden die Subsprachen MTS, IL, MUS und MSS als semantische Ebenen aufgefaßt, deren jeweiligen Sprachmuster als ebene Netze, Begriffe als deren Knoten, Wörter als deren Elemente interpretiert.

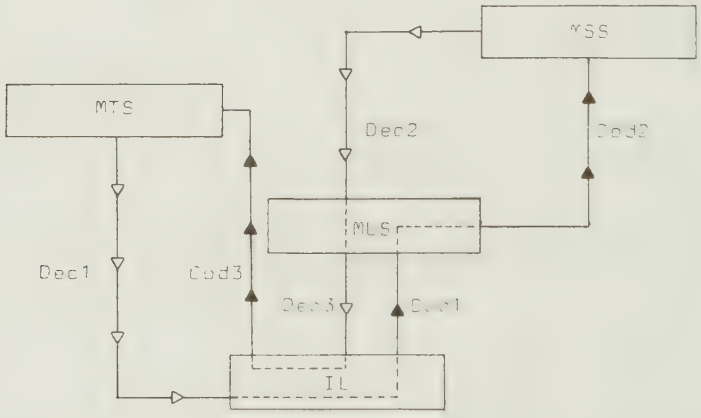


Abb.3 Erfolgen Mathematisierungen in Richtung IL-Ebene, sind sie als Decodierungen (Dec), andernfalls als Codierungen (Cod) aufgeführt.

Beim Ebenenwechsel muß durch Mathematisieren Aufeinanderabbilden von Teilbereichen der Netze derart erfolgen, daß die denotativen Bedeutungen der Transformate erhalten bleiben. Damit wird der Erfolg der Mathematisierungen von der Verfügbarkeit des Lösers über die Subsprachen des Vierebenenmodells und so über vorhandene semantische Codierungs- und Decodierungsmuster bestimmt.

Diese Muster sind quasi Wege, Verbindungen zwischen den semantischen Ebenen: je umfangreicher das Löserrepertoire an solchen Mustern, desto vielfältiger und enger sind die Ebenen miteinander verbunden, in umso höherem Grade miteinander vernetzt (66).

3.2.2. Einzelphasen des Lösungsprozesses

Gleichzeitig mit den soeben beschriebenen Textmathematisierungen erfolgen die Mathematisierungen

- Informationsanalyse (Auswahl der zur mathematischen Lösung relevanten Textinformationen),
- Strategieanwendung/Strategieentwicklung (Auswahl oder Entwicklung eines mathematischen Lösungsverfahrens zur Gewinnung eines mathematischen Funktionensystems und zur Ermittlung des mathematischen Operators),
- Operatoranwendung (Anwendung des Operators auf die Textaufgabe).

Den aufgeführten Mathematisierungen werden fünf Prozeßphasen zugeordnet:

Phase I

Mathematisierung 1 (M1): Decodierung 1 (Informationsaufnahme),
Mathematisierung 2 (M2): Informationsanalyse;

Phase II

Mathematisierung 3 (M3): Strategieanwendung/Strategieentwicklung,
Mathematisierung 4 (M4): Codierung 1,
Mathematisierung 5 (M5): Codierung 2;

Phase III

Operatorentwicklung (numerisches Lösen);

Phase IV

Mathematisierung 6 (M6): Decodierung 2,
Mathematisierung 7 (M7): Decodierung 3,
Mathematisierung 8 (M8): Operatoranwendung;

Phase V

Mathematisierung 9 (M9): Codierung 3.

In Phase III werden vorhandene Rechenfertigkeiten angewandt, dieser Phase ist keine Mathematisierung zuzuordnen.

Die aufgeführten Mathematisierungen stellen die *dynamischen Elemente* des Lösungsprozesses dar. Durch sie erfolgt Transformation lösungsrelevanter Informationen auf verschiedene semantische Abstraktionsebenen und Informationsverarbeitung. Die Transformate als Mathematisierungsprodukte hingegen sind Prozeßzustände, Aufgabenrepräsentationen in den jeweiligen Ebenen, sie bilden die *statischen Prozeßelemente*.

Im folgenden werden die Phasen und Elemente des Lösungsprozesses beschrieben.

Phase I

Informationsaufnahme

Der Prozeßbeginn und damit der Eintritt in die Informationsaufnahme wird in der Regel durch externe verbale oder nonverbale Lösungsaufforderungen initiiert (67).
Implizit erfolgt hierdurch die Vorabinformation "Aufgabenlösen", die beim Löser spezielles Lösungsverhalten hervorruft und andere mögliche interne Einstellungen weitgehend verdrängt. Einleitende Bemerkungen, semantische Texteigenheiten, Schlüsselwörter o.ä. wirken als Signale, durch die quasi "Weichen" zur Informationsanalyse gestellt und Analyserichtungen vorgegeben werden.
Diese Signale bewirken Einschränkungen des Analyseraums und Sensibilisierung für bestimmte Sachverhalte, ihnen kommt Selektionsfunktion zu, da durch sie dem Löser mitgeteilt wird, welche Gebiete beim Lösen einer Aufgabe zu berücksichtigen sind und welche nicht.
HÖRMANN (1977, S.42) beschreibt dies bei akustischer Informationsaufnahme so:

> "Was der Sprecher dem Hörer an Information vermittelt, ist der Befehl, einen bestimmten Zustand einzunehmen, sein System auf einen bestimmten Zustand (...) einzustellen." (68)

Der dem Löser vorliegende Text muß zunächst aus der Textsprache auf das idiolektale Sprachmuster des Lösers transformiert werden. Hierbei geht es um das Ersetzen MTS-sprachlicher Wendungen durch idiolektale, d.h. um Decodierungen von der MTS-Ebene zur IL-Ebene, die nur dann erfolgreich verlaufen, wenn der Löser bereits über diesbezügliche idiolektale Decodierungsmuster verfügt.

Informationsanalyse

Eine scharfe Abgrenzung der Informationsaufnahme von der -analyse erscheint kaum möglich, da durch das Lesen des Textes von den einzelnen Textteilen wiederum Signale erzeugt werden, durch die die Inhalte bestimmter Gedächtnisspeicher als interne Vorstellungen assoziiert werden (69).
Durch Synthese dieser Vorstellungen entsteht löserintern das "Bild" (MILLER/GALANTER/PRIBRAM; 1973, S.23) eines Realitätsbereichs (70), dessen Übereinstimmung mit dem in der Textaufgabe beschriebenen Realitätsbereich von den Sprach- und Sachkenntnissen des Lösers (LVSP, LVSA) bestimmt wird (71). Dieses "Bild" wird im folgenden als *interne Aufgabenrepräsentation* bezeichnet.
Diese Löservariablen bestimmen so die kognitiven Fähigkeiten des Lösers zur Erstellung des "Bildes", dessen "Qualität" von der individuellen Kapazität und Organisation semantischer und sachlicher Gedächtnisspeicher abhängt.
Übersteigt die Komplexität der Aufgabe diese Löserfähigkeiten, kann die interne Aufgabenrepräsentation entweder nur unvollständig erfolgen (72) oder ganz verhindert werden (73). Die Informationsanalyse ist dann abgeschlossen, wenn der Löser über ein internes "Bild" des Realitätsbereichs, eine interne Aufgabenrepräsentation verfügt - er hat dann die Aufgabe *verstanden*.

Phase II

Strategieanwendung/Strategieentwicklung

Die beim Analyseprozeß erzeugte interne Aufgabenrepräsentation umfaßt nicht nur diesbezügliche in Gedächtnisspeichern aktivierte Sprach- und Sacherfahrungen, sondern auch Erfahrungen um früher erfolgreich angewandte *Lösungsstrategien* (mathematische Lösungsverfahren) (74).
Damit stehen dem Löser Informationen über semantische Codierungsmuster zur Textransformation von der IL- zur MSS-Ebene und das Wissen um früher erfolgreich angewandte mathematische Operationen und hierzu benötigte Elemente, sowie deren hierarchische Anordnung in Form von Handlungsanweisungen auf idiolektaler Ebene zur Verfügung (Subvariable mathematische Fähigkeiten).
Durch die Analyse wurde aus der Vielzahl möglicher Strategien bereits eine aufgabenspezifische Auswahl dergestalt getroffen, daß der Aufgabenrepräsentation widersprechende Strategien ausgesondert wurden. Der Löser verfügt somit über ein mehr oder minder umfangreiches Strategierepertoire, aus dem die geeignetste Strategie ausgewählt und angewandt wird.
Im Idealfall führt diese Anwendung bereits zur mathematischen Lösung der Aufgabe (75), erweist sie sich als unbrauchbar, kann eine andere Strategie des Repertoires zum Ziel führen oder die Entwicklung einer neuen Strategie erforderlich werden.

Diese Strategieentwicklung ist wie folgt darstellbar:
Bei der Analyse der Teilinformationen wird durch die hierdurch erzeugten Teilbilder ebenfalls ein Repertoire von Strategieteilen zugänglich, aus dem die jeweils geeignetste auszuwählen ist. Die Auswahl erfolgt als subjektive Relevanzentscheidung aufgrund individuell verfügbarer Erfahrungen (s.o.), als irrelevant erachtete Teilstrategien werden vernachlässigt. Liegen alle erforderlichen Teilstrategien vor, erfolgt Synthese zu einem *Strategieentwurf*, dessen Richtigkeit durch Vergleich mit der internen Aufgabenrepräsentation geprüft werden muß. Erst nach erfolgreicher Prüfung kann der Strategieentwurf als Lösungsstrategie auf die Textaufgabe angewandt werden (76).

Die zur Strategieentwicklung erforderlichen kognitiven Aktivitäten lassen sich als Sub-TOTE-Einheiten einer übergeordneten TOTE-Einheit (77) anschaulich darstellen (Abb.4).
Der Löser prüft zunächst die vorliegenden Informationen bezüglich der von ihm ausgewählten Strategie (Testphase). Verläuft der Test negativ, wendet er auf die Informationen eine andere Strategie an (Operation) und stellt durch erneute Prüfung die Übereinstimmung dieser Strategie mit den Informationen fest (Testphase). Genügt diese Strategie nun den Anforderungen, kann sie zur mathematischen Aufgabenlösung angewandt und die Handlungseinheit verlassen werden (Exit). Bei Nichtübereinstimmung (No Exit), muß versucht werden, zu den Teilinformationen in einer *Versuch-Irrtum-Phase* Teilstrategien zu finden. Hierzu werden auf die Teilinformationen $I_{1...n}$ Operationen $O_{1...m}$ angewandt und einem anschließendem Übereinstimmungstest unterzogen (78).
Dies geschieht so lange, bis zu allen Teilinformationen Teil-

strategien gefunden werden, so daß schließlich die Synthetisierung erfolgen kann oder, falls dies nicht der Fall ist, das Verfahren aufgrund eines internen "Stop-Befehls" abgebrochen wird (79). Der synthetisierte Strategieentwurf wird schließlich auf die Gesamtheit der Informationen angewandt. Verläuft dieser Test positiv, wird der Entwurf zur Aufgabenstrategie.

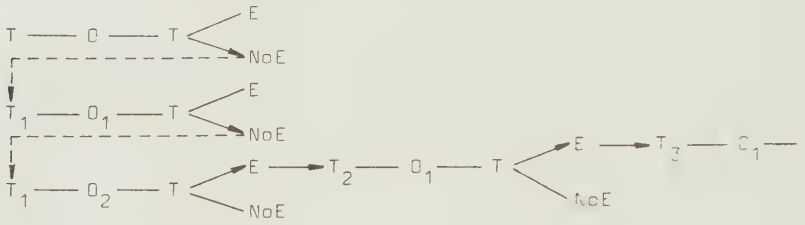


Abb.4 Versuch-Irrtum-Phase zur Entwicklung eines Strategieentwurfs

Vor der Durchführung des formalmathematischen Lösungsverfahrens ist zunächst die Transformation der strategischen Komponente der internen Aufgabenrepräsentation zur MSS-Ebene erforderlich. Diese Transformation ist als zweifach gestufter Abstraktions- und Reduktionsprozeß darstellbar:

Mathematisierung 4

Bei der Codierung von der IL- zur MUS-Ebene werden idiolektale Begriffsmuster der internen Aufgabenrepräsentation aus ihren Kontexten isoliert und durch MUS-sprachliche Begriffe ersetzt. Durch die Auswahl einer bestimmten Lösungsstrategie erfolgte bereits eine Einengung möglicher MUS-sprachlicher Begriffe, die Auswahl des geeignetsten MUS-Begriffs hängt sowohl von der Güte (Genauigkeit) der internen Aufgabenrepräsentation, wie vom MUS-Repertoire des Lösers ab (LVSP).

Mathematisierung 5

Die interne MUS-sprachliche Aufgabenrepräsentation wird durch eine erneute Codierung zur MSS-Ebene transformiert. MUS-sprachliche Begriffe werden durch mathematische Zeichen und Symbole ersetzt, die so quasi zu Ladungen dieser Begriffe werden.
Die Reduktionsphase ist abgeschlossen, wenn alle erforderlichen Aufgabenkomponenten zur MSS-Ebene transformiert wurden und die Aufgabe in Form einer mathematischen Gleichung vorliegt.

Phase III

Operatorentwicklung

Das mathematische Gleichungslösen erfolgt in der MSS-Ebene durch formales Anwenden eines hierzu geeigneten Algorithmus. Die mathematische Lösung stellt den codierten Prozeßoperator dar, der

nach wiederholten Decodierungen auf die Ausgangsaufgabe anzuwenden ist.
Unzureichende mathematische Fertigkeiten können zu fehlerhaften mathematischen Lösungen führen (LVM). Werden derartige Fehllösungen bemerkt, die Fehlerursache jedoch nicht dem mathematischen Verfahren zugeordnet, kann dies zur Revision des bisherigen Prozeßablaufs und/oder zum Abbruch des gesamten Lösungsverfahrens führen.

Phase IV

Decodierungen 2 und 3

Der mathematische Operator wird zunächst durch Decodierung 2 auf die MUS-Ebene transformiert. Hierbei wird seine "semantische Ladung" durch MUS-sprachliche Begriffe ersetzt. Durch erneutes Decodieren (Decodierung 3) erfolgt schließlich die semantische Operatortransformation zur IL-Ebene.
Die Abfolge dieser Decodierungen ist der Abfolge der Codierungen 1 und 2 entgegengesetzt. Zum Operatortransfer können daher mitunter auch Inversionen bereits vorhandener Codierungsmuster zur Anwendung kommen, der Operator wird dann lediglich in diese inversen Muster eingesetzt.

Operatoranalyse

Nach der Transformation des Operators zur IL-Ebene erfolgt dessen Prüfung durch Einfügen in die vom Löser entwickelte Aufgabenrepräsentation. Stimmt der Operator mit diesem internen Aufgabenkonzept überein, ist die Prüfung beendet, es erfolgt internes *Verstehen der gelösten Aufgabe.*

Nichtübereinstimmung des Operators mit der Aufgabenrepräsentation kann zur Wiederaufnahme des gesamten Lösungsprozesses oder zu dessen Abbruch führen.
Bei Wiederaufnahme kann der gesamte Lösungsprozeß als TOTE-Einheit dargestellt werden. Die Prüfung des Operators durch dessen Einfügen in die Aufgabenrepräsentation ist dann als Ausgangstest (T), die Entwicklung des semantischen Operators über die Sub-TOTE-Einheit Strategieentwicklung (bzw. über die Strategieanwendung bei vorhandener Strategie), die numerische Lösung und deren Decodierung als Operator (O) und das anschließende Einfügen des Operators in das interne Aufgabenkonzept wiederum als Testphase (T) anzusehen.

Die semantische Transformation von der MTS- zur IL-Ebene wird in diese TOTE-Einheit nicht einbezogen, da durch sie ja überhaupt erst die Voraussetzungen zur internen Aufgabenerkennung geschaffen werden. Die Transformation des Operators von der IL- zur MTS-Ebene hingegen stellt das Verlassen der Handlungseinheit (E) dar. Diese Transformation kann erst nach dem o.a. Verstehensprozeß, der internen Bestätigung der Aufgabenrepräsentation, der Einfügung des "Operatorbildes" in das "Bild" des Realitätsbereichs, erfolgen.

Der Gesamtprozeß von der internen Aufgabenrepräsentation bis zu

deren Überprüfung durch den Operator ähnelt der von MILLER/ GALANTER/PRIBRAM beschriebenen Bildfolge:

> "Die Elemente, mit denen der Problemlösende zu arbeiten scheint, sind demnach einmal sein perzeptives Vorstellungsbild von der Situation, bevor er etwas getan hat, dann sein vorgestelltes Bild, wie die Situation sein wird, wenn er einen bestimmten Weg einschlägt, weiter die Wahrnehmung der Situation, nachdem er etwas getan hat, schließlich sein Bild einer idealen Situation, die er zu erreichen hofft usw." (1973, S.169)

Phase V

Codierung 3

Die Anpassung des Operators an das semantische Muster der MTS-Ebene kann ebenfalls durch Anwendung von zu M 1 inversen, auf den Operator anwendbaren, Codierungsmustern erfolgen.
Nach dem Transfer von der IL- zur MTS-Ebene muß der Operator in den textsprachlichen Kontext eingefügt werden. Komplikationen können hierbei dann auftreten, wenn der Löser nicht über hierzu geeignete textsprachliche Begriffe verfügt.
Mit dieser Codierung ist die Bearbeitung der Textaufgabe abgeschlossen.

3.3. Entwicklung und Anwendung eines Untersuchungsinstruments zur Analyse realer Prozesse

Geht man davon aus, daß aufgrund "internaler Lernvoraussetzungen" (STRUNCK, 1982, S.51) interne Aufgabenrepräsentationen individuell variieren (Strategieteile in unterschiedlicher Reihenfolge zusammengesetzt werden, Codierungen und Decodierungen aufgrund unterschiedlicher Präkonzepte verschieden erfolgen, etc.), so wird deutlich, daß aufgrund vielfältig möglicher Varianten des internen "Bildes", der Analyse realer Lösungsprozesse standardisierte Lösungsverfahren als Vergleichsinstrumente zugrunde gelegt werden müssen.
Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die zuvor am Modell erörterten kognitiven Prozesse vielfach nicht nacheinander, sondern gleichzeitig ablaufen, Prozeßteile sich überlappen können und dann bei Untersuchungen mit kognitionspsychologischen Instrumenten (vgl. 1.4.) nur als Fragmente sichtbar werden. Trotz aller Verfeinerungen des Untersuchungsinstrumentariums wird es daher kaum möglich sein, alle Facetten des Prozeßablaufs im Schülerkopf externer Beobachtung zugänglich zu machen.
Das im folgenden beschriebene Untersuchungsinstrument wurde zwar speziell für die in der Studie verwandte Untersuchungsmethode des LAUTEN DENKENS entwickelt, es zeigte sich jedoch bei der Erkundungsstudie, daß es auch gut zur Auswertung von Prozeßprodukten geeignet ist und somit im Unterricht, "vor Ort", direkt eingesetzt werden kann und dem Lehrer in der Unterrichtspraxis wertvolle Aufschlüsse zur Planung und Analyse von Unterricht bei der Behandlung von Textaufgaben zu vermitteln vermag.

Im folgenden wird die Entwicklung des Untersuchungsinstruments am Beispiel einer Textaufgabe dargestellt. Hierzu ist zunächst Modellanwendung auf die Textaufgabe zur Isolierung der auftretenden Mathematisierungen und Mathematisierungsprodukte und deren Zuordnung zu den Prozeßphasen erforderlich. Die wichtigsten Prozeßelemente werden sodann als "Stationen" des Lösungsprozesses in ihrer Abfolge dargestellt und zum Exempel mit sichtbaren "Stationen" eines realen Lösungsprozesses verglichen.

Als Beispiel zur Anwendung des entwickelten Modells wird folgende Textaufgabe verwendet:

1 *Barbara und Martina vergleichen*
2 *ihr monatliches Taschengeld.*
3 *Dabei stellt sich heraus,*
4 *daß Barbara monatlich*
5 *12 DM mehr erhält als Martina.*
6 *Zusammen haben sie 56 DM.*
7 *Wieviel Taschengeld erhält Barbara monatlich?*

Phase I

M1 Der Aufgabentext weist keine ungewöhnlichen grammatikalischen Konstruktionen auf, Fremdwörter oder besonders schwierige Wörter fehlen.
Zeilen 1, 2, und 3 leiten zum Sachverhalt 'Taschengeldvergleich' hin und grenzen so den möglichen Deutungsspielraum ab. Zeile 7 gibt den Bearbeitungsraum und die Analyserichtung vor: ein Taschengeldbetrag ist zu berechnen.

M2 Die interne Aufgabenrepräsentation wird von individuellen Lösererfahrungen zum Sachbereich 'Taschengeld' bestimmt. Geht man vom vorliegenden Aufgabentext aus, könnten mögliche Sachkomponenten dieser Repräsentation bisherige Erfahrungen des Lösers zu

- selbst empfangenen Taschengeldbeträgen und deren Höhe,
- Taschengeldbeträgen, die andere Personen erhalten,
- Abweichungen zwischen diesen Beträgen,
- Mädchen, die Taschengeld erhalten, usw.

sein (80). Ein Schüler eines achten Schuljahres gab den Text nach einmaligem Lesen wie folgt wieder:

"Die Barbara und die Martina bekommen monatlich Taschengeld. Als sie vergleichen wieviel sie bekommen, merken sie, daß die Barbara 12 Mark mehr hat als die Martina. Wenn man das Geld von den Mädchen zusammenzählt, gibt das 56 Mark. Jetzt muß ausgerechnet werden, wieviel Taschengeld die Barbara monatlich bekommt."

Die hier verbalisierte Aufgabenrepräsentation stimmt mit dem in der Aufgabe beschriebenen Sachverhalt überein, der Schüler

verfügt bereits über ein internes Bild des Realitätsbereichs, er hat die Informationsanalyse abgeschlossen, die Aufgabe verstanden. Der letzte Satz weist durch *"Jetzt muß ausgerechnet werden, ..."* bereits auf die Entwicklung einer Lösungsstrategie hin.
Der Unterschied zwischen der MTS-Form der Aufgabe und der internen Aufgabenrepräsentation wird durch die idiolektale Decodierung der MTS-Wendungen *stellt sich heraus, mehr enthält, zusammen haben sie, DM* in *merken sie, mehr hat, wenn man zusammenzählt, gibt das, Mark* und die Transformation der Fragestellung in die Handlungsanweisung *"Jetzt muß ausgerechnet werden, ..."* deutlich.

Bei den folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, daß der Löser zwar über eine sprach- und sachspezifische Aufgabenrepräsentation verfügt, eine anwendbare mathematische Strategie jedoch noch nicht vorliegt.

Phase II

M3 Zur mathematischen Lösung kommen grundsätzlich drei Verfahren in Betracht:

a) Lösung durch eine lineare Gleichung,
b) Lösung durch "Rückwärtsrechnen",
c) Lösung durch "Versuch-Irrtum-Verfahren" (Trial-and-Error).

Das geeignetste Verfahren erscheint hier die Entwicklung einer linearen Gleichung mit der Variablenbelegung x:= Martinas Taschengeld, daher wurde diese Möglichkeit der folgenden Strategieentwicklung zugrunde gelegt. Die in b) und c) beschriebenen Möglichkeiten werden im Anschluß daran kurz erörtert.

a) Die Analyse ist unter diesem Aspekt nunmehr auf die Gewinnung relevanter Informationen bezüglich *"Martina"* gerichtet, Zuordnungen wie "Mädchen" etc. werden irrelevant.

Die in den Zeilen 4 und 5 enthaltenen Informationen sind verkürzbar auf:
"Barbara ... 12 DM mehr ... als Martina", bzw. auf die Textrelation TR1:= "12 DM mehr".
Hieraus kann, unter Außerachtlassen der Einheit "DM", die Handlungsanweisung: "zähle 12 dazu" oder MUS-sprachliche codiert: "plus 12" folgen.

Zeile 6 enthält die Informationen
- *"56 DM"* als explizite Angabe zur Höhe des gemeinsamen Taschengeldbetrages und
- *"zusammen haben sie"* als Grundlage zur Berechnung, bzw. verkürzt auf TR2:= "zusammen".

"Zusammen" läßt den Schluß zu, daß die Höhe des Taschengeldbetrages durch Summieren ermittelt wurde, so daß aus TR2 eine Handlungsanweisung der Form: "zusammenzählen", bzw. MUS-sprachlich codiert: "plus" folgt.

Im Unterschied zu TR1 ist aus "zusammen" jedoch nur eine *allgemeine* Handlungsvorschrift ableitbar. Erst nach einem weiteren Analyseschritt wird im Rückgriff auf Zeilen 1 und 2 über

das Pronomen *"sie"* für *"Barbara und Martina"* deutlich, auf welche Elemente sich "zusammenzählen" bezieht, erst hiernach ist dieser Terminus MUS-sprachlich codierbar.
Durch diese Analyse wird eine weitere implizit in Zeile 6 enthaltene Information etwa der Form: "so erhält man" zugänglich. Diese Textrelation (TR3) ergänzt die bereits abgeleiteten Informationen der Zeile 6 zu:
"Zählt man Barbaras und Martinas Taschengeld zusammen, so erhält man 56 DM".
Der eingangs zitierte Schüler decodierte und analysierte Zeile 6 als: *"Wenn man das Geld von den Mädchen zusammenzählt, gibt das 56 Mark."*
"So erhält man" wird hier als Handlungsvorschrift im Sinne von "setze gleich" aufgefaßt. Diese Handlungsvorschrift ist scharf zu trennen von der formalen Darstellung der Äquivalenzrelation " = " auf der MSS-Ebene, erstere ist ein dynamisches Element des Lösungsprozesses, letztere ein statisches Element der Aufgabenrepräsentation in der MSS-Ebene.

Aus der Textanalyse wird deutlich, daß zwischen Textrelationen, aus denen die auszuführende Handlung unmittelbar abzuleiten ist (TR1) und Textrelationen, aus denen konkrete Handlungen erst durch Rückgriff auf andere Textstellen zu ermitteln ist (TR2, TR3), unterschieden werden muß.
Ob ihrer expliziten Form werden künftig Handlungsanweisungen der Form TR1 als *Handlungsoperatoren (O)*, Handlungsanweisungen der Form TR2, TR3 als *Handlungsvorschriften (V)* bezeichnet.
Im Fall TR1 liegt ein Additionsoperator (AO) vor, der bei Transformation zur MSS-Ebene als mathematischer Operator:= "+12" zu codieren ist, im Fall TR2 ist eine Additionsvorschrift (AV) abzuleiten und als mathematischer Operator:= "+" zu codieren, aus TR3 schließlich folgt eine Gleichsetzungsvorschrift (GV), die als mathematische Äquivalenzrelation:= "=" zu codieren ist.

Nach den bisherigen Erörterungen können folgende Handlungsteile unterschieden werden:

1) Festlegung des Anfangszustandes

   Zo:= Martinas Taschengeldbetrag,

2) Anwendung des Additionsoperators AO auf Zo zur Berechnung des Zwischenzustandes

   Z1:= Barbaras Taschengeldbetrag:

   Zo ——AO——→ Z1 ,

3) Anwendung der Additionsvorschrift AV auf Zo und Z1, sowie Zuordnung der Summe zum Zwischenzustand Z2:

4) Anwendung der Gleichsetzungsvorschrift GV auf Z2 und den Endzustand

ZE:= 56:

Z2 ——► GV ◄—— ZE ,

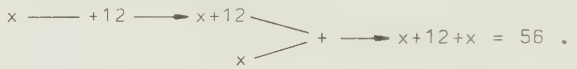
5) Synthese der Handlungsteile zur Strategie:

6) Zur Lösung der Textaufgabe ist jedoch die explizite Berechnung von Z1 als numerischem Aufgabenoperator erforderlich. Die Strategie muß daher um den zusätzlichen Schritt

Zc ——AO——► Z1

erweitert werden.

M4 Durch die Codierungen 1 und 2 erfolgt Transformation des Syn-
M5 thesepredukts zur MSS-Ebene. Dieses Produkt wird hierbei formalisiert in:



Phase III

Durch Lösen der linearen Gleichung

x + 12 + x = 56

wird zunächst die numerische Belegung x:= 22 ermittelt, durch erneutes Anwenden des mathematischen Operators +12 auf 22 der numerische Aufgabenoperator 34 berechnet.
Der mathematische Lösungsverlauf in der MSS-Ebene schließt die Prüfung der numerischen Lösung durch die "Probe"

22 + 34 = 56

ein.

Phase IV

M6 Der numerische Aufgabenoperator wird nun von der MSS-Ebene
M7 über die MUS- zur IL-Ebene transformiert und kann hierbei beispielsweise die idiolektale Form: "Barbara hat 34 Mark" annehmen.

M8 Die interne Aufgabenrepräsentation wird hierdurch ergänzt, die Lösung verstanden:
Barbara erhält monatlich 34 DM, Martina 22 DM, die Differenz zwischen beiden Beträgen ergibt sich mit 12 DM.
Erneutes numerisches Prüfen erfolgt nicht, die Bestätigung der Richtigkeit der hierzu erforderlichen Operationen ist noch durch die "Probe" auf der MSS-Ebene präsent, sie wirkt als Bestätigung des numerischen Operators quasi auf den semantischen Aufgabenoperator nach.

Phase V

M9 Nach dieser internen Prüfung erfolgt Codierung des Prozeßoperators zur MTS-Ebene etwa in der Form: "Barbara erhält monatlich 34 DM Taschengeld."
Hiermit ist die initiierende Ausgangsfrage beantwortet, der Lösungsprozeß abgeschlossen.

Ein fast identischer Lösungsweg ergibt sich, wenn die Variablenbelegung x:= "Barbaras Taschengeld" vorgenommen wird. Aus TR1 ist dann über die Folgerung: *"Barbara ... 12 DM mehr ... als Martina"* - "Martina ... 12 DM weniger ... als Barbara" der Subtraktionsoperator (AO^{-1}) "minus 12" abzuleiten und entsprechend einzusetzen. Der Vorteil dieser Variablenbelegung liegt darin, daß die numerische Lösung zugleich numerischer Aufgabenoperator ist, d.h., es muß keine weitere Rechenoperation in der MSS-Ebene erfolgen.
Der zuvor gezeigte Lösungsweg erfordert allerdings nicht die zusätzlichen Inversionen "mehr" - "weniger", bzw. "plus" - "minus".

b) "Rückwärtsrechnen" erfordert komplexeres Vorgehen, da zur Entwicklung der Lösungsstrategie alle im Text explizit gegebenen Informationen umzuformen sind. Der hier anzuwendenden Strategie liegt das Prinzip der "Gleichverteilung" zugrunde. Diese Gleichverteilung wird erreicht, indem auf ZE entweder (MUS-sprachlich codiert)

1) der Additionsoperator AO:= "plus 12"
oder
2) der hierzu inverse Subtraktionsoperator AO^{-1}:= "minus 12"

angewandt wird. Aus der Summe bzw. der Differenz wird sodann durch Anwendung des aus TR2 und Zeile 1 zu deduzierenden Divisionsoperators DO:= "geteilt durch 2" (Anzahl der Mädchen) der Taschengeldbetrag Barbaras 1) oder Martinas 2) ermittelt. Im letzteren Falle ist erneute Anwendung des Additionsoperators zur Ermittlung des Taschengeldbetrages von Barbara erforderlich.
Diese Strategie des Rückwärtsrechnens ist darstellbar durch:

1) Zo ◄— DO — Z1 ◄— AO — ZE

34 ◄— :2 — 58 ◄— +12 — 56

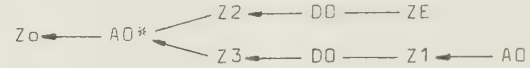
2) Zo ◄— AO — Z1 ◄— DO — Z2 ◄— AO^{-1} — ZE

34 ◄— +12 — 22 ◄— :2 — 44 ◄— -12 — 56

Eine Variante hierzu stellt das "Differenzverteilungsverfahren" dar:

Auf ZE *und* AO wird DO angewandt. Man erhält als Zwischenzustände Z2:= 28 und Z3:= 6. Interessant ist hierbei, daß der Handlungsoperator "plus 12" hier in den Zwischenzustand Z1:= 12 umgewandelt wird. Nach Einwirken von DO und Erreichen des Zwischenzustandes

Z3 wird erneut umgewandelt in einen Handlungsoperator AO*:= "plus 6". Dieser Vorgang ist als internes Strategiekonzept wie folgt darstellbar:



oder codiert:

(Die Pfeilspitzen geben die Handlungsrichtung an.)

c) Als Trial-and-Error-Strategie (kurz: TaE) wird hier jenes Verfahren bezeichnet, bei dem der Löser für Martinas und Barbaras Taschengeld so lange verschiedene Zahlen einsetzt, bis der Prozeßoperator gefunden ist (81).
Der Erfolg dieser Vorgehensweise hängt weitgehend von den Fähigkeiten und Fertigkeiten des Lösers ab, Zusammenhänge zwischen Zahlen herzustellen und Größen abzuschätzen.
Da diese Vorgehensweise individuell differiert, wird hierzu kein Normverfahren entwickelt.

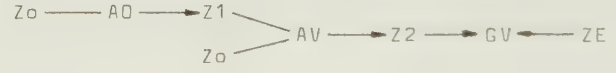
Standardisierung

Als wesentliche Mathematisierungen und Mathematisierungsprodukte beim Lösen der Textaufgabe können aus a) zusammengefaßt werden:

M1 Textaufnahme, Texttransfer zur IL-Ebene durch Decodierung 1,

M2 Textanalyse und Isolierung der Textrelationen TR1 - TR3,

M3 Strategieanwendung bzw. Strategieentwicklung zu



M4 Transfer zur MUS-Ebene durch Codierung 1,

M5 Transfer zur MSS-Ebene durch Codierung 2,

Operieren in MSS

a) Ermittlung der numerischen Lösung durch

$2x + 12 = 56, \qquad x = 22,$

b) Ermittlung des numerischen Prozeßoperators durch

$22 + 12 = 34,$

c) Probe durch

$22 + 34 = 56,$

M6 Transfer zur MUS-Ebene durch Decodierung 2,

M7 Transfer zur IL-Ebene durch Decodierung 3,

M8 Operatoranwendung,

M9 Operatortransfer zur MTS-Ebene durch Codierung 3.

Diese Mathematisierungsabfolge wird als Vergleichsinstrument allen realen Lösungsprozessen zugrunde gelegt und als *Standardisierung* bezeichnet.

Bei der Beobachtung von Denkprozessen können die Mathematisierungen M4, 5, 9 und M1, 6, 7 durch die verwendete Sprachform identifiziert werden, während aus Verbalisierungen zu TR1 - TR3 und den angeführten Strategieteilen die Informationsanalyse und die Strategieentwicklung sichtbar werden.
Die M2 und M8 zugeordneten Verstehensprozesse sind allerdings kaum beobachtbar, lassen sich jedoch häufig aus M3 und M9 erschließen.

Stellt man die Standardisierungen in einem Koordinatensystem dar, wobei die isolierten Prozeßelemente als Items auf der Ordinate, die Schrittfolge auf der Abszisse abgetragen werden, so bildet die Winkelhalbierende des ersten Quadranten des Koordinatensystems das Standardisierungsdiagramm.
Verfährt man in gleicher Weise bei der Darstellung realer Lösungsprozesse und kennzeichnet hierbei noch die Verbalisierungen je nach Sprachform (hier: MTS: ▭ , IL: O , MUS: △), so lassen Abweichungen dieser Darstellung von der Standardisierung Aussagen über löserspezifische Verfahrensweisen und Mathematisierungen beim Lösen von Textaufgaben zu. Die Auswertung der im Lösungsverlauf gefertigten schriftlichen Aufzeichnungen der mathematischen Operationen stellt eine wichtige Ergänzung dar, wenn der Löser nur spärlich verbalisiert. Die schriftlichen Aufzeichnungen vermögen dann zusätzliche Informationen zur Strategieanwendung oder -entwicklung, in Einzelfällen wohl auch zur Informationsanalyse, nicht jedoch zu Sprachformen und zu internen Aufgabenrepräsentationen zu liefern.

Das Verfahren wird im folgenden an einem Beispiel verdeutlicht. Einem Schüler eines achten Schuljahres wurde die soeben analysierte "Taschengeldaufgabe" mit der Aufforderung vorgelegt, möglichst alle Gedanken während des Lösungsprozesses laut zu äußern. Aus dem hierzu erstellten Wortprotokoll wurden die Mathematisierungen isoliert und ein Prozeßdiagramm gefertigt.

Protokoll des LAUTEN DENKENS beim Lösen der "Taschengeldaufgabe":

1 L *Lies dir bitte diese Aufgabe aufmerksam durch*
2 *und versuche sie zu lösen.*
3 S *(liest)*
4 *Achso! Also sag ich,*
5 *daß die Martina iks ist.*
6 *(notiert: x)*
7 *(liest)*
8 *Barbara ist iks plus zwölf, ...*

(notiert: x + 12)
(liest)
Beide zusammen haben sie
sechsundfünfzig Mark.
Ist zwei iks plus zwölf ...
gleich
sechsundfünfzig.
(notiert während er spricht:
2x + 12 = 56,
löst die Gleichung:
2x + 12 = 56 / -12
2x = 44 / (:2)
x = 22) .
Dann kriegt die Martina zwoundzwanzig
und die Barbara kriegt ...
(notiert: 22 + 12 = 44)
vierundvierzig.
Nee, kann net sein ...
(korrigiert 44 in 34)
vierunddreißig.

Mathematisierungen im Prozeßverlauf

M1 Mehrfache Informationsaufnahme (Z.3, 7, 10).

M2 Der Ausruf *"Achso!"* könnte als Hinweis auf den internen Verstehensprozeß gewertet werden. Der Löser verfügt, wie aus der zielstrebigen Bearbeitung der Aufgabe hervorgeht, offenbar über eine interne Aufgabenrepräsentation samt zugehörigem Strategiekonzept, das jetzt auf die Aufgabe angewandt wird (Z.4, 5).

M3 Die Strategieanwendung erfolgt stückweise. Strategieteile werden idiolektal (Z.4, 5, 11, 12) oder MUS-sprachlich codiert (Z.8).

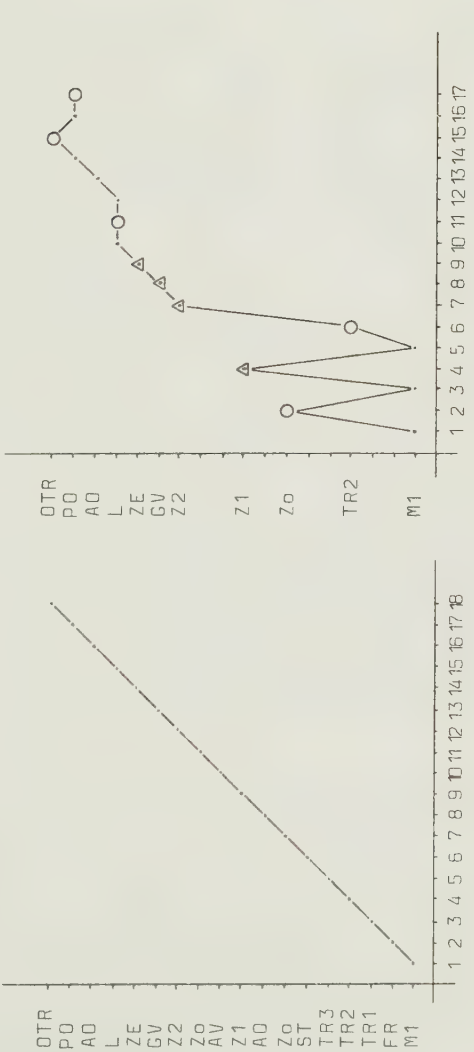
M4 In Z.13, 14, 15 wird die MUS-sprachliche Aufgabenrepräsentation sichtbar.

M5 Während der Verbalisierung erfolgt die Codierung der Aufgabenrepräsentation zur MSS-Ebene und anschließendes Operieren in der MSS-Ebene (Z.19, 20, 21).

M7 Die numerische Lösung wird zunächst decodiert und idiolektal verbalisiert, anschließend der Prozeßoperator ermittelt und ebenfalls zur IL-Ebene transformiert.

M8 Aus Z.26 wird ersichtlich, daß der Prozeßoperator einer internen Prüfung unterzogen wird: er "paßt nicht" zur Aufgabenrepräsentation und wird korrigiert.

M9 Eine Transformation des Prozeßoperators zur MTS-Ebene findet nicht statt.



Abszisse: hypothetische/reale Abfolge der Einzelschritte; Ordinate: Prozeßelemente. Nicht im Text aufgeführte Abkürzungen: OTR: Operatortransfer, L: numerische Lösung der Gleichung, ST: Strategie, FR: Frage, .: nonverbale Aktivitäten (M1: Textlesen, sonst schriftliche Aufzeichnungen), ⊙:IL-, △ :MUS-Verbalisierungen und gleichzeitig erfolgende Aufzeichnungen.

4. DIE ERKUNDUNGSSTUDIE

Mit dieser Vorstudie sollte zunächst generell eruiert werden, inwieweit die Überlegungen des vorigen Kapitels auf reale Situationen zutreffen.
Dazu wurde wie folgt verfahren:
Einer siebten Realschulklasse mit 18 Schülern (S.134) wurden im letzten Viertel des Schuljahres 1980/81 insgesamt 17 Textaufgaben als Haus- oder Schulaufgaben vorgelegt, die teils verschiedenen Mathematikbüchern entstammen (38), teils Eigenkonstruktionen sind. Aus den schriftlichen Aufzeichnungen der Schüler wurden Aufschlüsse über verwendete Lösungsverfahren, hierbei erfolgte Mathematisierungen, aufgetretende Fehler, sowie über Löser- und Aufgabenvariablen erwartet.

Trotz früher dargelegter Einwände gegen diese Untersuchungsmethode wurde sie hier zum einen aus pragmatisch-zeitökonomischen Gründen verwendet, zum anderen, um generell zu klären, welche Rückschlüsse aus schriftlichen Aufzeichnungen zu Textaufgaben möglich sind.
Da in der Praxis des Mathematikunterrichts Analysen schriftlicher Aufzeichnungen am häufigsten vorgenommen werden, prozeßorientierte Analyseverfahren hingegen nur in Ausnahmefällen zur Anwendung kommen, ist die hier angewandte Untersuchungsmethode praxisorientiert und die Erkundungsstudie und deren Ergebnisse zumindest in dieser Hinsicht auch unterrichtspraktisch bedeutsam.

Vor der Durchführung der Studie wurde der Kenntnisstand der Schüler beim Lösen formaler linearer Gleichungen mit einer Variablen, die jenen der MSS-Aufgabenrepräsentationen der Textaufgaben entsprachen, ermittelt. Hierbei ergab sich, daß alle Schüler diese formalen Gleichungen richtig lösen konnten.

Im folgenden Kapitel werden zunächst Fragestellungen präzisiert und Untersuchungsmethoden beschrieben, sodann Ergebnisse mitgeteilt und Einzelfallstudien zu den Aufgaben 4 und 6 durchgeführt, in Abschnitt 4.3. folgt eine Diskussion der Ergebnisse.

4.1. Fragestellungen und Untersuchungsmethoden

Fragestellungen

Mit der Erkundungsstudie sollte durch Auswertung schriftlicher Schüleraufzeichnungen zunächst geklärt werden

1. welche Fehler beim Lösen von Textaufgaben in der untersuchten Lerngruppe auftraten und inwieweit durch sie in 2.3. aufgeführte Befunde bestätigt wurden,
2. inwieweit das entwickelte Untersuchungsinstrument zur Analyse realer Prozesse geeignet war und Mathematisierungsprodukte Rückschlüsse auf erfolgte Mathematisierungen gestatteten,
3. inwieweit obige Analysen Aussagen zu mittleren Kompetenzen der Lerngruppe und somit zu Löser- und Aufgabenvariablen erlaubten.

Untersuchungsmethoden

Zur Beantwortung dieser Fragen wurde folgendermaßen vorgegangen:

Ad 1. Nach den referierten Befunden konnte mindestens mit formalen Rechenfehlern und mit Fehlern bei semantischen Transformationen gerechnet werden. Zunächst galt es daher, die aufgetretenen Fehler aufzulisten, bestimmte Fehlertypen zu isolieren, ihren Auftretensort zu bestimmen und Abweichungen bzw. Übereinstimmungen mit den referierten Befunden festzustellen.

Ad 2. Zu den in der Erkundungsstudie verwendeten Aufgaben wurden Standardisierungen unter Zugrundelegung linearer Gleichungen entwickelt (S.136). Aus Vergleichen der Schüleraufzeichnungen mit den Standardisierungen wurden Rückschlüsse auf Strategieentwicklungen und hierzu erforderliche Mathematisierungen erwartet.

Ad 3. Aus den Fehleranalysen wurden Aufschlüsse über zu "leichte" und zu "schwere" Aufgaben, d.h. über die mittlere Kompetenzen der Lerngruppe unter- bzw. überschreitende Aufgaben bzw. Aufgabenvariablen erwartet, sowie über Löser, die bezüglich Fehlerhäufigkeiten und Fehlertypen deutlich vom Durchschnitt der Lerngruppe abwichen.

Hierzu war zunächst eine Kategorisierung der verwendeten Textaufgaben erforderlich.

4.1.1. Kategorisierung von Textaufgaben

Nach den in Textaufgaben verwendeten Sprachformen werden unter Zugrundelegung eines Lösungsverfahrens durch eine lineare Gleichung mit einer Variablen folgende Kategorien definiert:

Kategorie A Im Text werden ausschließlich fachsprachliche Termini verwendet.

Kategorie B Im Text werden fachsprachliche und nichtmathematische Termini verwendet.

Kategorie C Im Text werden ausschließlich nichtmathematische Termini verwendet.

In allen Kategorien können mathematische Symbole auftreten.

Die semantische Struktur der Aufgaben wird durch Anzahl und Abfolge der in ihnen verwendeten Textrelationen bestimmt. Folgende Fallunterscheidungen werden getroffen:

1 Die Abfolge der Textrelationen entspricht der zur mathematischen Lösung erforderlichen,

2 die Textrelationen sind zur mathematischen Lösung umzuordnen.

Die Anzahl der expliziten Textrelationen ist

a kleiner als erforderlich,

b ebenso groß wie erforderlich,

c größer als erforderlich.

Die Anzahl der impliziten Textrelationen

d genügt als Ergänzung der expliziten Textrelationen zur Lösung,

e dies ist nicht der Fall.

Nach den Textaufgaben zugrunde liegenden Handlungsstrukturen werden folgende Fälle unterschieden:

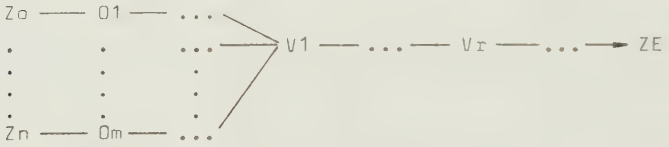
Die zur Aufgabenlösung zu entwickelnde Handlungsfolge

I ist unverzweigt der Form

Zo —— O —— ... ——→ ZE,

sie wird als lineare Handlungsstruktur bezeichnet;

II ist verzweigt der Form:



und wird als nichtlineare Handlungsstruktur bezeichnet.

Eine Feinunterscheidung nach Art und Anzahl der Operatoren sowie der Anzahl der Anfangszustände, kann durch zusätzliche Indizierung erfolgen.

Die Sachverhalte von Textaufgaben werden wie folgt klassifiziert:

L Bereiche des täglichen Lebens und der erfahrbaren Umwelt als

1 reale Situation,

2 künstliches Konstrukt;

S Themen aus dem Bereich der Schule;

M mathematische Aufgaben.

Beispiel zur Kategorisierung: "Taschengeldaufgabe" aus 3.3.

B Die Textaufgabe enthält MUS-sprachliche und nichtmathematische Termini,

1 die Reihenfolge der Textrelationen ist zur Lösung nicht umzuordnen,

a die Anzahl der explizit gegebenen Relationen reicht zur Lösung nicht aus,

d aus dem Text sind die impliziten Textrelationen TR2 und TR3 abzuleiten,

II die zu entwickelnden Handlungsstrukturen sind nichtlinear,

L der Sachverhalt entstammt der erfahrbaren Umwelt des Schülers,

2 die Sachverhaltsbeschreibung ist ein Konstrukt, das in dieser Form nicht in der Realität anzutreffen ist.

Damit ist die Textaufgabe der Kategorie B1a,d; II; L2 zuzuordnen.

4.1.2. Die verwendeten Textaufgaben

Die Textaufgaben wurden als Haus- oder Schulaufgaben gestellt, die Schüler aufgefordert, ihre Lösungswege möglichst ausführlich schriftlich darzustellen. Bis Aufgabe 8 erfolgte hierzu die Anweisung:
"Löse die Aufgabe möglichst durch 'x-Rechnung'",
danach wurde diese Aufforderung in:
"Löse die Aufgabe möglichst nur durch 'x-Rechnung'"
abgewandelt.

A1 Addiert man zum Fünffachen einer Zahl zwölf, so erhält man zweiundvierzig.
Wie heißt die Zahl?

A2 Drei Schwestern sind zusammen vierzig Jahre alt, die älteste ist sechs Jahre älter als die jüngste und diese wiederum vier Jahre jünger als die mittlere.
Wie alt sind die Schwestern?

A3 Subtrahiert man vom Dreifachen einer Zahl neun und multipliziert die Differenz mit vier, so erhält man sechzig.
Wie heißt die Zahl?

A4 Siggi spart regelmäßig und hat jetzt 1450 DM. Dies sind 150 DM weniger als das Doppelte der Summe, die er vor einem Jahr besaß.
Wieviel war das?

A5 Aus einer Erbschaft sollen 36000 DM unter drei Kindern so verteilt werden: Das älteste Kind erhält 6000 DM weniger als das jüngste und dieses wiederum 3000 DM mehr als das mittlere.
Wieviel Geld erhält jedes Kind?

A6 Addiert man zum Vierfachen einer Zahl sieben und multipliziert die Summe mit drei, so erhält man neunundsechzig.
Wie heißt die Zahl?

A7 Von zwei Brüdern ist einer acht Jahre älter als der andere. Zusammen sind sie achtzig Jahre alst.
Wie alt ist jeder der Brüder?

A8 Lothar hat mit seinem BMW in sechs Stunden 756 km zurückgelegt.
Wie viele Kilometer legte er in einer Stunde zurück?

A9 Das Fünffache einer um sechs vermehrten Zahl ist einhundertfünf.
Wie heißt die Zahl?

A10 Lothar, Günter, Hanns und Siegfried wiegen zusammen 335 kg. Lothar und Günter haben das gleiche Gewicht, Hanns wiegt 8 kg mehr als jeder der beiden, Siegfried 13 Kg weniger.
Wieviel wiegt jeder von ihnen?

A11 Lothar, Hanns und Rainer fahren nach Frankfurt. Lothar benötigt für die Fahrt 15 Minuten weniger als Rainer und dieser wiederum 7 Minuten weniger als Hanns. Zählt man ihre Fahrzeiten zusammen, erhält man eine Gesamtzeit von 97 Minuten.
Wieviel Zeit benötigt jeder einzelne?

A12 Vier Mädchen haben zusammen 930 DM gespart. Elke und Sonja sparten den gleichen Betrag, Magda 62 DM mehr als jede der beiden, Eva 16 DM weniger.
Wieviel hat jedes Mädchen gespart?

A13 Ein Rechteck hat einen Umfang von 56 cm. Die kurze Seite a ist 5 cm kürzer als die lange Seite b.
Wie lang ist jede Seite?

A14 Ein Dreieck hat einen Umfang von 780 m. Die Seite a ist 120 m kürzer als die Seite b und diese wiederum 264 m kürzer als die Seite c.
Wie lang ist jede Seite?

A15 Ein Viereck hat einen Umfang von 930 m. Die Seiten a und b sind gleichlang, die Seite c ist 52 m länger als die Seite a, die Seite d 16 m kürzer.
Wie lang ist jede Seite?

A16 In einem Mathematikwettbewerb haben Johannes, Stefan und Thomas zusammen 31 Punkte erreicht. Johannes erreichte 7 Punkte mehr als Stefan und dieser 3 Punkte mehr als Thomas.
Wie viele Punkte hat jeder Schüler erreicht?

A17 Alf, Dietrich und Gorden fahren um die Wette. Alf war auf der 1050 m langen Strecke der schnellste, Dietrich brauchte 8 Sekunden, Gorden 11 Sekunden länger. Zählt man die Fahrzeiten zusammen, ergeben sich 335 Sekunden.
Wieviel Zeit hat jeder benötigt?

Die Textaufgaben lassen sich wie folgt kategorisieren:

A1, A3, A6, A9:	A 2b; I; M
A14, A15:	A 2a,d; II; M
A13:	A 2a,e; II; M
A4:	B 2b; I; L2
A10, A11, A12, A16:	B 2a,d; II; L2
A2, A5, A17:	B 2a,e; II; L2
A8:	C 2b; I; L1
A7:	C 2b; II; L2

(Eine Darstellung der Handlungsstrukturen dieser Aufgaben ist im Anhang S.135 wiedergegeben.)

4.2. Ergebnisse der Erkundungsstudie

4.2.1. Überblick

Von den insgesamt 306 Aufgaben wurden 16 Aufgaben wegen Fehlens der Schüler, 34 Aufgaben aus Gründen wie "keine Zeit", "vergessen", "ich konnte mit der Aufgabe nichts anfangen", usw. nicht bearbeitet (Tabelle 1). Von den verbleibenden 256 Aufgaben wurden 171 (67%) durch Anwendung einer linearen Gleichung (Strategie 1), 46 (18%) durch Rückwärts- oder Durchschnittsrechnungen (Strategie 2) gelöst. Bei 11 Aufgaben (4%) gaben die Schüler "Lösen durch Probieren" (Strategie 3) an, 5 Schüler (2%) wechselten die Strategie während der Bearbeitung: 3 SS: 1/2, 1 S: 2/1, 1 S: 3/1, 23 Aufgabenbearbeitungen ließen sich keiner Strategie zuordnen (Strategie 0) (9%). (Alle Prozentwerte gerundet.)
(Bei der Auswertung der schriftlichen Aufzeichnungen wurden eine Reihe von Strategievarianten beobachtet, sie sind in Tabelle 1 durch Mehrfachindizierungen (etwa 111, 21, usw.) gekennzeichnet und im Anhang S.141 ff explizit dargestellt.)

126 Aufgaben (49%) wurden vollständig richtig bearbeitet (Wertung ++), bei 11 Aufgaben (4%) fehlten Proben oder Textantworten (Wertung +), die übrigen 119 Aufgaben (47%) wiesen insgesamt 156 Fehler auf (Wertung - oder --). Die Fehler setzten sich wie folgt zusammen:

91 (58%) Fehler bei der Operatoranwendung oder der Anzahl zu berechnender Größen (a-Fehler),

34 (22%) Rechenfehler (Fehler bei Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen oder durch falsche Anwendung des Distributivgesetzes) (b-Fehler),

14 (9%) Schreibfehler (c-Fehler),

17 (11%) nicht identifizierbare Fehler (d-Fehler).

Auffällig ist der hohe Prozentsatz von a-Fehlern, die durch falsche Operatoranwendung oder falsche Anzahl zu berechnender Größen verursacht wurden, sowie der Anteil der Rechenfehler. a-Fehler sind somit die Hauptursache für Fehllösungen der Schüler der untersuchten Lerngruppe, sie stehen im Mittelpunkt der folgenden Erörterungen.

Es gelang eine Unterscheidung dieses Fehlertyps nach 5 Unterkategorien:

8 Fehler durch falsche Operatorfolge (a1-Fehler),
25 Fehler durch Auslassung von Operatoren (a2-Fehler),
21 Fehler durch Anwendung inverser Operatoren (a3-Fehler),
22 Fehler durch Anwendung falscher Operatoren (a4-Fehler),
15 Fehler durch falsche Anzahl zu berechnender Größen (a5-Fehler),

27 dieser Fehler traten als Doppelfehler auf.

Den Ursachen von b- und c-Fehlern wird hier nicht weiter nachgegangen: c-Fehler werden als "Fehler durch Verschreiben" betrachtet, zu Rechenfehlern liegen bereits einschlägige Untersuchungen

Tabelle 1

Tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse der Erkundungsstudie

VP \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	+ ④ 2	- a4 01	* c 1 01	- a3 1 11	- d 02	◯	◯	++ 1	- a4 1 12	+ ④ 1	⁄	⁄	⁄	⁄	⁄	* b 1 01	- d 1 2
2	* b 2 2	++ 3	- d 02	- a3 1 21	= d 0	++ 01	= d 0	++ 2 1	- b 3 ④ 1	= a2 a5 1 11	- a3 1 111	++ 1	- c a5 1 113	- a2 a4 1 132	++ 1	- a2 a4 1 111	++ 1
3	++ 2	= b d 0 02	= d 0	= a1 a3 1 23	= d 2 3 2	= b c 1 12	- a4 2 21	++ 2	= b a1 1 11 21	++ 1	⁄	⁄	= a1 a2 ④ 11 21	⁄	++ 1	- a2 a4 1 111	++ 1
4	+ ④ 2	◯	◯	- a3 1 21	◯	◯	◯	++ 1	* b 1 11	* c 1 1	- a3 1 111	++ 1	++ 11	++ 13	++ 1	++ 11	++ 1
5	++ 01	++ 3	◯	- a3 1 21	= d ④ 21	◯	◯	++ 2	* c 1 1	= a2 a5 1 11	◯	++ 1	- a5 1 112	- a2 a4 1 132	- a3 1 11	- a2 a4 1 111	◯
6	++ 1	◯	◯	++ 2	= d 0	++ 2	++ 01	++ 1	++ 1	++ 1	- a3 1 121	++ 1	* c 4 1	* b 2 11	◯	++ 11	++ 1
7	- a4 1 21	◯	◯	= a1 a3 1 23	= d 0	= a2 a4 ② ④ ③ 21	= a4 a5 1 22	++ 1	- a3 1 14	- a2 a5 1 12	◯	◯	++ 11	* d a5 01	- a5 1 12	- a5 1 112	- a5 1 11
8	++ 2	++ 3	++ 3	⁄	* c 4 2	++ 01	++ 02	++ 1	* c 1 1	++ 1	- a3 1 121	++ 1	++ 11	- a2 a4 1 132	+ ④ 1	⁄	⁄

SS \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	+ ④ 2	++ 3	++ 3	/	- d 01	++ 02	= d 0	++ 1	* b 1 11	++ 1	* b 2 11	++ 1	++ 12	* b 2 13	++ 1	++ 11	++ 1
10	++ 2	◯	◯	= a1 a3 1 23	++ 2	* b 1 11	* b 1 2	++ 2	++ 1	++ 1	- a2 a4 1 112	- a3 2 11	- a5 1 113	* b 4 13	* c 1 1	++ 12	++ 1
11	+ ④ 1	++ 3	* b 1 11	- a3 1 21	= d 0	- b 1 ④ 11	◯	++ 1	++ 1	= a2 a5 1 11	- a2 a4 1 112	++ 1	◯	= b 1 ③④ 12	++ 1	++ 11	++ 1
12	+ ④ 2	= d 0	+ ④ 3	- a3 1 21	++ 2	= c a2 1 22	++ 2	++ 1	++ 1	++ 1	/	* c 4 1	- a5 1 111	/	/	- a2 a4 1 111	= b c 2 1
13	++ 1	++ 02	* b 1 11	/	= b d 1 11	- b 1 ④ 11	++ 1	++ 1	- a2 1 13	+ ④ 1	- a2 a4 1 112	++ 1	++ 11	- a2 a4 1 111	++ 1	- a2 a4 1 111	++ 1
14	+ ④ 2	++ 1 3	++ 1	* b 1 1	++ 1	++ 1	- a2 1 11	++ 1	++ 1	++ 1	++ 12	++ 1	++ 12	++ 14	++ 1	++ 11	++ 1
15	= b ②③④ 2	◯	◯	- a3 1 22	++ 3	◯	◯	++ 2	- a1 1 21	= a1 a2 1 1 21	- a3 1 131	◯	++ 12	= b 2 ③④ 13	++ 1	++ 11	◯
16	+ ④ 1	◯	- a4 1 12	= b a3 1 22	= b c 1 2	* b 1 11	◯	* b 2 1	* b 2 11	++ 1	* b 2 12	++ 1	++ 11	- a2 a4 1 132	++ 1	++ 11	* b 4 1

SS \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
17	◯	◯	◯	= a1 a3 1 23	* b 2 2	* b 2 1 11	- a4 1 12	++ 1	++ 1	= a3 a5 1 11	++ 12	++ 1	- a5 1 113	- a2 a4 1 131	+ ④ 1	++ 12	++ 1
18	++ 2	++ 3	++ 3	- a3 1 21	* c 2 1	++ 2	++ 1	++ 1	* b 1 1	++ 1	++ 12	++ 1	++ 12	++ 12	++ 1	++ 12	++ 1

Auswertungsschlüssel

Die Daten sind wie folgt angeordnet:

Bewertung:

- ++ vollständig richtig
- + fehlende Probe/Textantwort
- * b-Fehler, c-Fehler
- - a-Fehler, d-Fehler
- = mehrere Fehler

Fehlerort:

- 1 Ansatz
- 2 Rechenweg
- 3 Ergebnis
- 4 Probe/Textantwort
- ① fehlender Ansatz
- ② fehlender Rechenweg
- ③ fehlendes Ergebnis
- ④ fehlende Probe/Textantwort

◯ nicht bearbeitete Aufgabe

Fehlertyp:

- a1 falsche Operatorfolge
- a2 Auslassung von Operatoren
- a3 Anwendung inverser Operatoren
- a4 Anwendung falscher Operatoren
- a5 falsche Anzahl zu berechnender Größen
- b Rechenfehler
- c Schreibfehler
- d unidentifizierbarer Fehler

Lösungsstrategie:

- 1 Lösung durch lineare Gleichung
- 2 Lösung durch Rückwärtsrechnen
- 3 Lösung durch TaE-Verfahren
- 0 nicht identifizierbares Lösungsverfahren

/ Schüler fehlte im Unterricht

vor, sie werden nur dann berücksichtigt, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang mit a-Fehlern herstellbar ist.
Die Entstehung von d-Fehlern konnte ebensowenig wie das Vorgehen bei O-Strategien geklärt werden, das vorliegende Belegmaterial reichte zu eingehenden Analysen nicht aus, so daß auf diesbezügliche Diskussionen verzichtet wird.

4.2.2. Einzeldarstellungen

Im folgenden werden Schülerbearbeitungen der Aufgaben 4 und 6 analysiert und hierbei aufgetretene Fehler diskutiert.
Diese Aufgaben sind von besonderem Interesse, da sie Rückschlüsse auf die sprachliche (A 4) und die mathematische (A 6) Kompetenz der Lerngruppe ermöglichen.
Im Anschluß an diese Darstellungen werden weitere Befunde zu den übrigen Aufgaben mitgeteilt.

Aufgabe 4

Bei Aufgabe 4 wurde eine komplexe Informationenfolge gewählt, um die sprachlichen Fähigkeiten der Schüler bei der Informationsanalyse zu ermitteln.

Der Text wurde aus den Teilinformationen I1 - I5:

I1: *"Siggi ... hat jetzt 1450 DM"*,
I2: *"Dies sind 150 DM weniger als"*,
I3: *"das Doppelte"*,
I4: *"der Summe"*,
I5: *"die er vor einem Jahr besaß"*,

zu einem semantischen Konstrukt der Form I1 I2 (I3(I4(I5))) zusammengefügt.
Der entscheidende Analyseschritt zur internen Aufgabenrepräsentation ist die Erkenntnis, daß Siggi durch regelmäßiges Sparen jetzt über mehr Geld verfügt als vor einem Jahr. Dieser Schritt wird erschwert durch die mit I2 verbundene minuierende Vorstellung von *"... weniger ..."*.
Ist dieser Analyseschritt geglückt, können aus den Informationen folgende Textrelationen und Zustände isoliert werden:

TR1: 150 DM weniger,
TR2: das Doppelte,
TR3: die er besaß,
Zo: die Summe, die er besaß,
ZE: 1450 DM

und so die Handlungsoperatoren

SO: minus einhundertfünfzig,
MO: mal zwei,
GV: gleich.

Hieraus ist die Handlungsabfolge

Zo ——— MO ———► Z1 ——— SO ———► Z2 ———► GV ◄——— ZE

zu entwickeln, die nach Codierung zur MSS-Ebene eine Aufgabenrepräsentation der Form

$2x - 150 = 1450$ ergibt.

Wird Rückwärtsrechnen angewendet, sind die zu SO und MO inversen Handlungsoperatoren

SO^{-1}: plus einhundertfünfzig,
MO^{-1}: geteilt durch zwei

abzuleiten und hiernach die Handlungsabfolge

$Zo \longleftarrow MO^{-1} \longrightarrow Z1 \longleftarrow SO^{-1} \longrightarrow ZE$

zu entwickeln.

Lediglich SS 1 und 14 versuchten, diese Aufgabe mit einer linearen Gleichung zu lösen, alle übrigen Schüler rechneten nach Strategie 2.

Im folgenden werden die schriftlichen Aufzeichnungen der Schüler (Rechnungen und Kommentare) ohne jegliche Änderung wiedergegeben.

S 2:
$1450 + 150 = 1600$
$1600 \cdot 2 = 3200$
Siggi hatte vor einem Jahr 3200 DM

S 4: $1450 + 150 - 1600 \cdot 2 = 3200$

S 5:

$1450+150$ Er hat dieses Jahr
$1600 \cdot 2$ 150 DM weniger also
3200 muß man das zu
der Summe dazu-
rechnen da kommt
1600 raus und dann
muß man das ~~dasssss~~ mal 2 nehmen
dann bekommt man 3200 DM und das
ist das was er letztes Jahr hatte.

S 11:
$1450 + 150$ Er hat 150 DM weniger als im vorigen Jahr.
$1600 \cdot 2$ Die 150 muß man zu den 1450 dazuzählen.
3200 Das Ergebnis dann mal 2 genommen.

S 12: $1450 + 150 = 1600 \cdot 2 = 3200$
Es waren 3200 DM.

S 18:
1450
$+150$
$1600 \cdot 2 = 3200$
+ 150 weil es 150 DM weniger waren weil sie letztes Jahr das doppelte hatte.

SS 2, 4, 5, 11, 12 und 18 wandten das Konzept an:

"Siggi besaß vor einem Jahr die doppelte Summe, dieses Jahr hat er die Hälfte, an der ihm noch 150 DM fehlen."

SO^{-1} wurde hier richtig codiert, die Löser scheiterten jedoch am Relativsatz I5, den sie auf I3 bezogen. (Sie wandten daher folgerichtig MO:= ·2 an.)

S 3: Rechnung: 1450 : 2 = 725 (die Hälfte)
725 - 150 = 575 DM

Probe: 575 + 150 = 725 · 2 = 1450

S 7:
1450 : 2 = 725
14 -150
05 575 DM waren das
4
10

Ich nehme die Hälfte von 1450 und dann nehme ich 150 DM ab. Das sind 575 DM.

S 10:

Ich rechne 1450 : 2 = 725 - 150 = 575
575 hatte sie vor einem Jahr.

In der Aufgabe steht das die 1450 um die Hälfte noch 150 DM weniger sind und so habe ich das gerechnet.
Ich habe nachgerechnet und wenn ich 1450 - 150 = 1300 und das : 2 komme 650 heraus

S 17: Ich nehme die Hälfte von den 1450 DM das sind 725 und zähle zu den 725 DM 150 DM zu. Das sind 575 DM.
Er hat also vor einem Jahr 575 DM gespart.

S 15:

1450 DM
- 150
1300 : 2 = 650 DM
Er hatte vor 1 Jahr 650 DM

Ich nehme von 1450 DM 150 DM weg dann habe ich nur noch 1300. Die teile ich durch 2 da kommt 650 DM. raus und soviel hatte er vor 1 Jahr

SS 3, 7, 10 und 17 wandten das Konzept an:

"Siggi besitzt jetzt die doppelte Summe, vor einem Jahr hatte er 150 DM weniger als die Hälfte."

Sie bezogen fälschlich I5 auf I1, wandten folgerichtig MO^{-1}:= :2 an und behielten den Subtraktionsoperator SO:= -150 bei.

S 15 ging möglicherweise von dem Konzept aus:

"Siggi besitzt jetzt 150 DM mehr als das Doppelte, vor einem Jahr besaß er die Hälfte."

Hier wurde SO^{-1}:= +150 angewandt, I5 ebenso wie bei der vorhergehenden Konzeption auf I1 bezogen.

Die Aufzeichnungen der Schüler 16, 1, 14 und 6 sind weniger aufschlußreich. Offensichtlich wandte S 16 die direkt aus dem Text ableitbaren Operationen an. Er beging zudem einen Additionsfehler.

S 16: Zuerst rechne ich 1450 - 150. Dann rechne ich 1300 + 1300. Das sind 1600 DM. Er hatte letztes Jahr 1600 DM.

$$\begin{array}{r} 1450 \\ -150 \\ \hline 1300 \\ 1300 \\ \hline 1600 \end{array}$$

S 1 und S 14 wandten Strategie 1 an, wobei S 1 fälschlich SO zu SO^{-1} invertierte. S 14 entwickelte den richtigen Ansatz, gelangte jedoch aufgrund recht sonderbarer Rechenoperationen zu einer falschen Lösung.

S 1: Siggi hatte vor einem Jahr 1300 DM es sind aber 150 DM weniger als 1450 DM, die er dieses Jahr gespart hat.

$$\begin{aligned} 2x + 150 &= 1450 \;/\; (-150) \\ 2x &= 1300 \;/\; (:2) \\ x &= 650 \end{aligned}$$

S 14:

$$\begin{aligned} 2x - 150 &= 1450 - 150 : 2 \\ x &= 1450 - 150 : 2 \\ &\quad 1300 : 2 \\ &\quad 650 \end{aligned}$$

S 6 gelang als einzigem die richtige Lösung:

$1450 + 150 = 1600 : 2 = 800$

Sie hat jetzt ~~1450~~ 1450 das sind 150 DM weniger als die die Hälfte vom letzten Jahr also hatte sie letztes jahr

Sie hatte letztes Jahr 800 DM.

Zu seiner schriftlichen Antwort befragt, erläuterte S 6 seinen Rechenweg nach Strategie 2 und bemerkte entschuldigend:

"Ja, des is immer so schwierig zu schreiben. Rechnen kann ichs ja, ich kann mich nur net so richtig ausdrücken, bei der Antwort."

Aufgabe 6

Die MTS-sprachliche Form dieser Aufgabe entsprach der MUS der Klasse, die zu semantischen Transformationen erforderlichen Codierungs- bzw. Decodierungsmuster wurden dem aktiven Wortschatz der Schüler zugerechnet.

Aus A 6 sind zunächst die Textrelationen

TR1: Vierfache,
TR2: addiert man sieben,
TR3: multipliziert mit drei,
TR4: so erhält man,

sowie die Zustände

Zo: einer Zahl,
ZE: neunundsechzig

zu isolieren. Aus TR1 - TR3 sind sodann bei Anwendung von Strategie 1 die Handlungsoperatoren

MO1: mal vier,
AO: plus sieben,
MO2: mal drei,

aus TR4 die Gleichsetzungsvorschrift GV abzuleiten.
Zur Strategieentwicklung bzw. -anwendung sind die Prozeßelemente zur Handlungsabfolge

Zo ——MO1——► Z1 —— AO ——► Z2 —— MO2 ——► Z3 ——► GV ◄—— ZE

anzuordnen und hieraus die MSS-Aufgabenrepräsentation

$(4x + 7) \cdot 2 = 69$ abzuleiten.

Anwendung von Strategie 2 erfordert die Inversionen

$MO1^{-1}$: geteilt durch vier,
AO^{-1}: minus sieben,
$MO2^{-1}$: geteilt durch drei,

sowie die Handlungsabfolge

Zo◄—— $MO1^{-1}$ —— Z1◄—— AO^{-1} —— Z2◄—— $MO2^{-1}$ ——ZE.

Die besondere Schwierigkeit bei Strategie 1 liegt in der Anwendung des Distributivgesetzes, das bei Strategie 2 nicht erforderlich ist. Hier tritt Z2 als numerische Größe (23) und nicht als Summe (4x + 7) auf.

Die Aufgabenbearbeitungen im einzelnen:

S 3: $4 \cdot x + 7 \cdot 3 = 29$

$7 \cdot 3 + 4 \cdot x = 29$

$21 + 4 \cdot x = 29$

25

$4 \cdot x + 7 \cdot 3 = 29$

$7 \cdot 3 + 4 \cdot x = 29$

$4 \cdot x + 21 = 29$

$4 \cdot 2 + 21 = 29$

$x = 8$ 1 8

Probe: $4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 29$

deine Zahl heißt: 8

S 10:

$x \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 69 \quad / :3$

$x \cdot 4 \cdot 7 = 23 \quad / :4$

$x \cdot 7 = 5{,}75 \quad / :7$

$x = \frac{5{,}75}{7}$

$23 : 4 = 5{,}75$

$\underline{20}$

30

$\underline{28}$

20

$\frac{5{,}75}{7} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 69$

S 11:

$4x + 7 \cdot 3 = 69 \quad / -21$

$4x = 48 \quad / :4$

$x = 12$

Probe: $4 \cdot 12 + 7 \cdot 3 = 69$

$69 = 69$

S 13:

$4x + 7 = x \cdot 3 \cdot 3 = 69 \quad / -21$

$4x = 48$

$x = 12$

Probe: $4 \cdot 12 + 7 \cdot 3 = 69$

S 14: Wie heißt die Zahl?

$(4x + 7) \cdot 3 = 69$

$12x + 21 = 69 \quad / -21$

$12x = 48$

$x = 4$

Probe: $4 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \quad 69$

$23 \cdot 3 = 69$

$69 = 69$

Die Zahl heißt 4.

S 16: $4x + 7 \cdot 3 = 69$

$4x + 21 = 69 \quad /(-21)$

$4x = 69 - 21$

$4x = 48 \quad /(:4)$

$x = 12$

Probe: $48 + 21 = 69$

$\begin{array}{r} 48 \\ 21 \\ \hline 69 \end{array}$

Stimmt!

Die Zahl die verdreifacht wurde heißt 12!

S 17:

$(4x + 7) \cdot 3 = 69$

$4x + 7 \cdot 3 = 69$

$4x + 21 = 69 \quad (-21)$

$4x = 48$

$x = 12$

Die Zahl heißt 12

Probe $4 \cdot 12 + 7 \cdot 3 = 69$

$48 + 21 = 69$

$69 = 69$

SS 3, 10, 11, 13, 14, 16 und 17 wandten Strategie 1 an, nur SS 14 und 17 entwickelten den richtigen mathematischen Ansatz (!) $(4x + 7) \cdot 3$, die übrigen Schüler ließen die Klammer weg, scheiterten somit am Distributivgesetz.

Deutet man diesen Fehler am Vier-Ebenen-Modell, so ist folgende Interpretation plausibel:
Die Transformation von der MTS- zur IL-Ebene erfolgte richtig, im Ausgangstext ist eine Klammerregel nicht enthalten. Die Lösungsstrategie: 'die Summe aus 4x und 7 ist mit drei zu multiplizieren', wurde zwar bei der Transformation zur MSS-Ebene beibehalten, die Löser verfügten jedoch nicht über die Kenntnis der mathematischen Regel "Distributivgesetz", notierten daher: $4x + 7 \cdot 3$, meinten jedoch: $(4x + 7) \cdot 3$.
Bei Anwendung des Lösungsalgorithmus wird der mathematische Fehler bedeutsam, vom Löser jedoch nicht bemerkt, da er noch immer mit dem richtigen internen Konzept "Summe mal drei" arbeitet. Somit ist dieser Fehler auf mangelnde Rechenfertigkeit zurückzuführen und als Rechenfehler einzustufen.
Diese Argumentation wird durch die Probe von S 14 unterstützt: in der ersten Probezeile wurde $4 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 69$ notiert, in der zweiten Zeile das Produkt der Summe aus $4 \cdot 4 + 7$ und 3, $23 \cdot 3 = 69$.

Bei S 10 trat zusätzlich der Schreibfehler (?) "." statt "+" auf, die Gleichung wurde hier jedoch ebenso wie bei SS 11, 13, 14, 16, (17) formal richtig gelöst.
Schwieriger gestaltet sich die Analyse bei S 3. Neben dem Schreib-

fehler in der ersten Zeile (29 statt 69) erscheint in der vierten Zeile 4 · 2 + 21 = 29 statt 4x + 21 = 29. Es leuchtet ein, nur x = 2 kann die Lösung dieser Gleichung sein. Dieser löserinterne Schluß bewirkt beim Übergang zur vierten Zeile eine so starke Assoziation, daß x durch 2 ersetzt wird.
Dieser plötzliche Einfall scheint jedoch beim Übergang zur fünften Zeile verloren: x = 8 ? nein, x = 2 ? nein, x = 8 ! Die Irritation wird am Durchstreichen der Ziffern 8 und 2 kenntlich und bei der letzlichen Verwendung der 2 in der Probe.
Dieser zweite Fehler wurde als Rechenfehler eingestuft.

S 6: 69 : 3 = 23
23 - 7 = 16
16 : 4 = 4

Die Zahl ist 4.

S 7: Frage: Wie heißt die Zahl?

Rechnung: 69 : 3 = 23
$\underline{69}$ $\underline{-4}$
19

Die Zahl heißt 19.

S 12: 99 : 3 = 33 - 7 = 26
26 + 7 · 3 = 99

Die Zahl heißt 26

S 18: 69 : 3 = 23 - 7 = 16 : 4 = 4

Die Zahl heißt 4

SS 6, 7, 12 und 18 wandten Strategie 2 an, wobei S 6 und S 18 zu richtigen Lösungen gelangten.
S 12 unterlief bereits im Ansatz der Schreibfehler 99 statt 69, im weiteren Verlauf der Rechnung wurde zudem $M01^{-1}$ ausgelassen.
Bei S 7 ist sowohl die Anwendung eines falschen Operators (-4 statt :4), wie das Auslassen von S0 festzustellen.

S 2: Die zahl heißt 4
4 · 4 = 16 + 7 = 23 · 3 = 69

S 8: 4 · 4 = 16 + 7 = 23 · 3 = 69

Die Zahl heißt 4

S 9: 4 · 4 + 7 · 3 = 69

die Zahl heißt 4

Die Aufzeichnungen der Schüler 2 und 8 sind nicht eindeutig einzuordnen. Das Ergebnis 4 könnte durch Anwendung von Strategie 2

oder durch ein TaE-Verfahren erzielt worden sein. Für erstere Annahme spricht die Abfolge der Operationen, die für eine Probe nach Strategie 2 typisch ist. Die angewandte Strategie wurde daher als O1 eingestuft.
Die Einordnung der Lösungsstrategie von S 9 ist nach den vorliegenden Aufzeichnungen nicht möglich. Die erste Zeile entspricht einer Probe nach Strategie 1 ohne Distributivgesetz, wie sie bereits von S 14 bekannt ist, in der zweiten Zeile wird lediglich die Lösung 4 angegeben, die auf Strategie 2 oder ein TaE-Verfahren hindeutet. Dieses Verfahren wurde als O2 eingestuft.

Weitere Ergebnisse

Bei Aufgabe 10 trat mit dem Ansatz $3x + 8 = 335$ der Doppelfehler a2/a5 auf, die Anzahl der zu berechnenden Größen wurde von vier auf drei verringert, die Textrelation "Siegfried 13 kg weniger" nicht in die Berechnung einbezogen.
Dieser Fehler trat bei den ähnlich strukturierten Aufgaben 12 und 15 nicht auf. Hier wird die Anzahl der zu berechnenden Größen explizit genannt:

A 12: *"Vier Mädchen ... "*,
A 15: *"Ein Viereck ... "*.

Bei A 13 wurde der a-Fehler noch deutlicher. Wie viele Seiten hat ein Rechteck - zwei (Strategievariante 111, 113), drei (Strategievariante 112) oder vier? SS 2, 5, 17 wiederholten den a5-Fehler von A 10 auch bei A 13, bei A 12 und A 15 hingegen trat er nicht auf.
Bei A 11, A 14 und A 16 trat der Doppelfehler a2/a4 auf. Er ist auf die Verknüpfung der Textrelationen

A 11: *"... 15 Minuten weniger als Rainer und dieser wiederum 7 Minuten weniger als Hanns ..."*,

A 14: *"... a ist 120 m kürzer als die Seite b und diese wiederum 264 m kürzer als die Seite c ... "*,

A 16: *"... Johannes hat 7 Punkte mehr als Stefan und dieser 3 Punkte mehr als Thomas ..."*

rückführbar. Diese Texttransformation gelang insgesamt 12 Schülern nicht, 6 scheiterten bei A 14, 5 bei A 16, nur 3 jedoch bei A 11. Hier traten statt des Doppelfehlers bei 5 Schülern Inversionen auf, möglicherweise führte die Relation "weniger als" zur Anwendung des vertrauteren Transformationskonzepts: weniger ⟶ mehr ⟶ plus, während für die Relation "kürzer als" (A 14) kein derartiges Konzept vorlag und der a3-Fehler unterblieb.

Bei A 5 traten insgesamt 9 d-Fehler auf. Im Aufgabentext sind die Altersangaben "älteste", "jüngste" mit den Begriffen "weniger", "mehr" gekoppelt. Bei Verbindung der Altersbezeichnungen mit den Begriffen "mehr" bzw. "weniger" entstehen die Gegensätze:

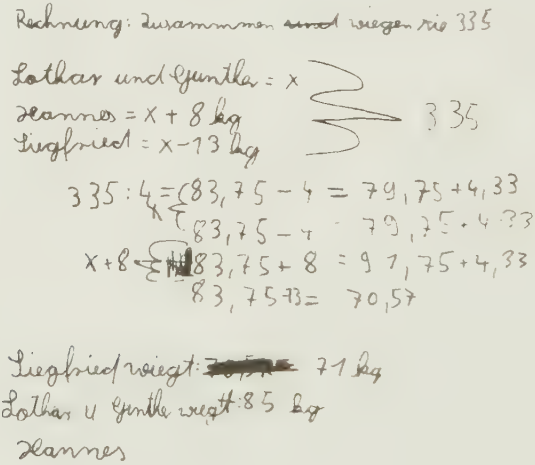
(älteste:=) mehr - weniger,
(jüngste:=) weniger - mehr.

Somit ist der nach Strategie 1 abzuleitende Additionsoperator: $AO := + 3000$ durch den inversen Subtraktionsoperator $AO^{-1} := - 3000$

zu ersetzen. In der zuvor gestellten Aufgabe 2 wurden Altersbezeichnungen ohne weitere Koppelung verwendet, hier traten nur 2 d-Fehler, dagegen 7 Nichtbehandlungen auf - auch hier waren inverse Begriffe: "jünger" - "mehr" zu verwenden.
In der ähnlich strukturierten Aufgabe 17 waren dagegen keine konträren Relationen enthalten bzw. zu entwickeln, die Anzahl der richtigen Lösungen war bei dieser Aufgabe höher.

Abschließend noch ein Beispiel zum Strategiewechsel (S 15, A 10). Nach offenbar erfolglosem Lösungsversuch mit Strategie 1 wandte die Schülerin eine komplizierte "Durchschnitts-Differenz-Verteilungsmethode" zur Lösung an. Obgleich falsch, wird doch deutlich, daß das hier erforderliche interne Handlungsmodell eine weitaus höhere kognitive Leistung erfordert, als die Erstellung des Strategieentwurfs nach Strategie 1.

S 15
A 10



Folgende Einzelschritte sind erkennbar:

1. Versuch zur Anwendung von Strategie 1:

   Bestimmung der Zustände
   Zo: Lothar und Günther: = x
   Z1: Hanns := x + 8 kg
   Z2: Siegfried := x - 13 kg
   ZE: 335

2. Wechsel zur Strategie 2 durch Differenzausgleichsrechnen:

   a) Berechnung des Durchschnitts:
      335 : 4 = 83,75
   b) Herstellung der Differenzen zu Hanns durch Subtraktion von 4 und Addition von 8:
      83,75 - 4 = 79,75

83,75 - 4 = 79,75
83,75 + 8 = 91,75

c) Herstellung des Unterschieds zu Siegfried durch Subtraktion von 13:
83,75 - 13 = 70,57

d) Aufteilung von 13 an Lothar, Günther und Hanns:
79,75 + 4,33
79,75 + 4,33
91,75 + 4,33

e) Rundung der Ergebnisse zu 71 bzw. 85.

4.3. Diskussion und Folgerungen

Die Ergebnisse der Erkundungsstudie werden im folgenden bezüglich der Fragestellungen in Abschnitt 4.1. diskutiert.

Ad 1.: Aus den schriftlichen Aufzeichnungen ließen sich

- Fehler, die auf fehlerhafte Informationsaufnahme oder -analyse hindeuten (a-Fehler), unterscheiden von
- Fehlern, die auf falsche Anwendung von Rechenalgorithmen oder Rechenfehler schließen lassen (b-Fehler).

a) Die Häufigkeit der a-Fehler überstieg dabei die der b-Fehler um mehr als das Doppelte. Am häufigsten traten folgende a-Fehler auf:
- Auslassung von Operatoren (a2-Fehler),
- Anwendung inverser Operatoren (a3-Fehler),
- Anwendung falscher Operatoren (a4-Fehler).

b) Bei Textaufgaben mit nicht expliziter Angabe zu berechnender Größen wurden mehr a-Fehler beobachtet als bei anderen Textaufgaben.

c) Bei Aufgaben der Struktur II4 (vgl.S.), bei A 4 und A 10 wurden höhere a-Fehleranteile ermittelt als bei anderen Aufgaben.

Insgesamt werden hierdurch die in 2.3. referierten Befunde bestätigt. Erstaunlich ist der hohe Anteil von a-Fehlern. Während für a3-Fehler durch Schlüsselreize verursachte Direktcodierungen von der MTS- zur MSS-Ebene angenommen werden können, könnten a2-Fehler auf fehlerhafte Informationshierarchisierung zurückgeführt und somit der Strategieentwicklung zugerechnet werden, zur Genese von a4-Fehlern bietet sich keine Erklärung an.

Ad 2.: Der Vergleich der schriftlichen Aufzeichnungen mit den Standardisierungen gestattete in den meisten Fällen die Bestimmung der zugrunde liegenden Lösungsstrategie (M3). Tabelle 1 entnimmt man, daß erwartungsgemäß, trotz der Lehreranweisung, möglichst alle Aufgaben mit einer linearen Gleichung zu lösen, einige Schüler mitunter andere Strategien anwandten.
An verwendeten Strategien konnten daher isoliert werden:

Strategie 1: Lösungsverfahren mit einer linearen Gleichung,
Strategie 2: Lösungsverfahren mit Rückwärts- oder Durchschnittsrechnungen,
Strategie 3: Lösungsverfahren mit TaE-Verfahren.

In welchem Umfange die Strategien als bereits vorhandene interne Strategiekonzepte zur Aufgabenlösung eingesetzt wurden oder inwieweit sie im Lösungsverlauf erst entwikkelt wurden, ging aus den Aufzeichnungen nicht hervor. Die in wenigen Fällen beobachteten Strategiewechsel sind allerdings als sichtbares Indiz dafür zu werten, daß - zumindest bei diesen Schülern - die Strategieentwicklung als Problemlöseprozeß ablief. Möglicherweise sind auch die als O-Strategien bezeichneten Verfahren als mißlungene Strategieentwicklungen - abgebrochen durch STOP-Befehle - zu werten.
Genaue Aussagen zu Mathematisierungen sind über M3 hinaus aus dem vorliegenden Material nicht ableitbar, Interpretationen daher überwiegend hypothetisch, da sie aus Rückschlüssen durch Vergleiche aus mathematischen Aufgabenrepräsentationen schriftlicher Aufzeichnungen einerseits und mathematischen Aufgabenrepräsentationen der Standardisierungen andererseits gewonnen werden müßten.

Ad 3.: Aus den Fehlerhäufigkeiten ließen sich folgende Zuordnungen vornehmen:

- die durchschnittliche a-Fehlerhäufigkeit ($\bar{x}$ = 5.4) wurde bei A 1, 2, 3, 12, 17 (1), 6 (3), 9 (5) unterschritten (Klammerwerte absolute Häufigkeiten);
- A 8 wurde von allen Schülern außer S 16 richtig gelöst;
- bei A 11 (11), 16 (11), 10 (12), 14 (13), 4 (17) wurde die durchschnittliche a-Fehlerhäufigkeit bedeutsam überschritten.

Dies kann bedeuten, daß bei den letztgenannten Aufgaben die Ausprägung der Aufgabenvariablen AVSP oder AVSA größer war als die diesbezügliche mittlere Kompetenz der Lerngruppe (vgl. Analyse A 4).

- Die durchschnittliche a-Fehlerhäufigkeit wurde von SS 14 und 18 (1) bedeutsam unterschritten,
- SS 3, 17 (8), SS 2, 5 (9), S 7 (14) überschritten die durchschnittliche a-Fehlerhäufigkeit.

Dies kann bedeuten, daß bei den letzgenannten Schülern die Ausprägung der Variablen LVSP bzw. LVSA geringer war als die diesbezügliche mittlere Kompetenz der untersuchten Lerngruppe.

Im Extremfall A 4 überstieg AVSP deutlich die sprachanalytischen Fähigkeiten der Schüler. Somit kann diese Aufgabe als sprachlich "zu schwer" für diese Lerngruppe bezeichnet werden, Schlüsse auf die Variablen LVSA oder LVM sind jedoch hieraus nicht möglich.
Eindeutige Aussagen zur Ausprägung der Variablen LVSP, LVSA sowie AVSP, AVSA sind somit aus den vorliegenden

schriftlichen Aufzeichnungen nicht möglich.

b-Fehler hingegen erlauben eindeutige Schlüsse auf die Variable LVM:

- S 16 überschritt mit 7 b-Fehlern die durchschnittliche b-Fehlerhäufigkeit der Lerngruppe ($\bar{x} = 2$).

Hieraus kann auf eine im Vergleich zur untersuchten Lerngruppe geringere Ausprägung der Löservariablen LVM, genauer, der Subvariablen "mathematische Fertigkeiten" geschlossen werden.

Zur Anwendung des Untersuchungsinstruments auf schriftliche Aufzeichnungen zu Textaufgaben läßt sich zusammenfassend feststellen:

1. Das Instrument ist nur geeignet, Fehlerarten, nicht jedoch Fehlerursachen aufzuzeigen.
2. Durch Vergleich der Standardisierungen mit den Aufzeichnungen ist es möglich, Löserstrategien zu erkennen. Hieraus abgeleitete Schlüsse auf erfolgte Mathematisierungen sind weitgehend hypothetisch.
3. Aussagen zu Löser- und Aufgabenvariablen sind nur bezüglich LVM und AVM möglich. Aus auftretenden a-Fehlern kann nicht auf semantische oder sachliche Inkongruenzen geschlossen werden.
4. Das Untersuchungsinstrument ist unter Berücksichtigung der Punkte 1-3 zur Schnellanalyse schriftlicher Schüleraufzeichnungen zu Textaufgaben einsetzbar.

5. DIE HAUPTSTUDIE

Ausgehend von den Ergebnissen der Erkundungsstudie und den dort aufgeworfenen Fragen, sollte die Hauptstudie Auskunft zu Mathematisierungen und deren Abfolge, Strategieanwendungen und -entwicklung und zur Genese von a-Fehlern geben. Um diesen, für das Lösen von Textaufgaben als zentral erachteten Fragen nachzugehen, wurden 12 Schülern jeweils 9 Textaufgaben vorgelegt und ihr Lösungsprozedere mit der Methode des LAUTEN DENKENS verfolgt und ausgewertet.

In Abschnitt 5.1. werden Fragestellungen, Textaufgaben und Untersuchungsmethoden erörtert, in Abschnitt 5.2. schließen sich Einzeldarstellungen der Aufgabenbearbeitungen an, in Abschnitt 5.3. folgt schließlich eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse.

5.1. Planung der Haupstudie

5.1.1. Thesen zur Hauptstudie

Drei Fragenkomplexe lagen aufgrund der Ergebnisse der Erkundungsstudie der Thesenbildung der Hauptstudie zugrunde:

1. Inwieweit stimmen Einzelmathematisierungen realer Lösungsprozesse und deren Abfolge mit dem postulierten Mathematisierungsmodell überein?
2. Welche Faktoren sind für die Anwendung und die Entwicklung bestimmter Strategien bedeutsam?
3. Auf welche Ursachen lassen sich a-Fehler zurückführen und welcher Phase des Lösungsprozesses sind sie zuzuordnen?

Ad 1.:
Die Standardisierungen erwiesen sich bei der Erkundungsstudie zwar als geeignete Instrumente zur Strategieanalyse, die schriftlichen Aufzeichnungen gestatteten jedoch kaum Aussagen zu Einzelmathematisierungen und deren Abfolge im Lösungsprozeß. Genauere Aufschlüsse sollen durch veränderte Untersuchungsmethoden (vgl. 5.1.3.) gewonnen werden. Hierzu wird These 1 formuliert:

These 1: Die Einzelmathematisierungen und deren Abfolge im Lösungsprozeß stimmen mit den Standardisierungen überein.

Ad 2.:
Die Auswertung der Erkundungsstudie nach verwendeten Strategien deutet darauf hin, daß Strategieanwendungen sowohl aufgaben- wie schülerspezifisch erfolgen.
Die vermehrte Anwendung einer bestimmten Strategie bei bestimmten Aufgaben durch verschiedene Schüler kann Indiz für Strategieinitiierungen durch semantische, sachliche oder mathematische Aufgabenkomponenten, vermehrtes Anwenden der gleichen Strategie bei verschiedenen Aufgaben durch einen Schüler hingegen Indiz für beschränktes Strategierepertoire oder unflexible Problemlö-

sehaltung des Lösers sein. Aufschluß hierzu wird von These 2 erwartet:

These 2: Strategieanwendungen erfolgen aufgabenspezifisch.

Ad 3.:
Die Auswertung der Erkundungsstudie ergab überdurchschnittliche a-Fehlerhäufigkeiten bei bestimmten Schülern und bei bestimmten Aufgaben. Als Gründe für auch in der Erkundungsstudie nachgewiesene Nichtinversionen von Textrelationen (a3-Fehler), geben NESHER u.a. fixe interne Decodierungskonzepte an. Solche Konzepte müßten durch vermehrtes Auftreten bei bestimmten Schülern oder bei bestimmten Aufgaben sichtbar werden.
Aus der Erkundungsstudie ergab sich kein eindeutiges Bild: zwar wurde dieser Fehlertyp nachgewiesen, gleichzeitig vorhandene Sachfehlkonzepte ließen jedoch den Ausschluß der Vermutung, daß a3-Fehler durch Sachfehlkonzepte generiert wurden, nicht zu.

Bezieht man in diese Überlegung die übrigen a-Fehlertypen ein und berücksichtigt dabei, daß a-Fehler immer auch Indikatoren für einen anderen als den intendierten Sachverhalt sind, so wird die Frage nach dem Kausalzusammenhang bedeutsam:

- werden a-Fehler durch Sachfehlkonzepte bei der Informationsanalyse erzeugt, so kann angenommen werden, daß der Löser den intendierten Sachverhalt nicht verstanden hat, es liegen dann Sachinkongruenzen vor;
- entstehen a-Fehler bei Decodierungen (MTS- zur IL-Ebene), sind sie auf semantische Inkongruenzen zurückzuführen und erzeugen so Sachfehlkonzepte.

Zur Klärung dieser Frage wird These 3 formuliert:

These 3: a-Fehler entstehen durch Fehldecodierungen bei der Informationsaufnahme.

5.1.2. Untersuchungsinstrumente

Zur Prüfung der Thesen wurden folgende Textaufgaben entwickelt:

1. Michael will sich seit langem ein Moped kaufen und liest deshalb regelmäßig die Verkaufsangebote in der Butzbacher Zeitung. Endlich findet er zwei interessante Angebote: ein Moped soll doppelt soviel kosten, wie er bis jetzt gespart hat, das andere ist jedoch 280 DM billiger, es kostet nur 1120 DM. Michael redet mit seinem Vater so lange, bis dieser ihm schließlich das noch fehlende Geld gibt und kauft sich das billigere Moped.
   Wieviel Geld erhielt Michael von seinem Vater?
2. Das Vierfache einer Zahl vermindert um 380 ist 1400.
   Wie heißt die Zahl?
3. Thomas fragt Andrea nach ihrem Alter. Sie lächelt und antwortet: "Eigentlich fragt man eine Dame nicht nach ihrem Alter, aber trotzdem: genau vor sechs Jahren war meine Großmutter dreimal so alt wie ich. Heute ist sie sechsundsechzig."
   Thomas ist ratlos - wie alt ist Andrea?

4. Zu seinem zwölften Geburtstag bekam Gunther von seinem Großvater eine Briefmarkensammlung geschenkt. Er begann selbst zu sammeln, tauschte mit seinen Freunden und hat jetzt eine beachtliche Sammlung - viermal so viele Marken wie zu Beginn. Morgen bei der großen Briefmarkenauktion in Frankfurt will er 56 Afrikamarken verkaufen. Seine Sammlung ist dann genau halb so groß wie die von Bernd, der 2288 Briefmarken besitzt. Wie viele Marken besaß Gunther als er anfing zu sammeln?

5. Subtrahiert man vom Fünffachen einer Zahl elf und multipliziert die Differenz mit drei, so erhält man 237.

6. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Rohre gefüllt werden, durch das eine in 20 Minuten, durch das andere in 30 Minuten. Wie lange dauert die Füllung, wenn aus beiden Rohren zugleich Wasser fließt?

7. In einem Sportwettkampf haben Martina, Birgit, Thomas und Daniela zusammen 58 Punkte erreicht. Birgit und Martina haben die gleiche Punktzahl, Thomas erreichte sechs Punkte mehr als jede der beiden, Daniela vier Punkte weniger. Wie viele Punkte erreichte jeder einzelne?

8. Der Vater ist 33 Jahre, die Tochter 12 Jahre alt. In wie vielen Jahren ist der Vater doppelt so alt wie die Tochter?

9. Lothar, Hanns und Siegfried haben zusammen im "Belgrad" zu Abend gegessen. Da der Ober irrtümlich annahm, Siegfried wolle für alle drei bezahlen, überreicht er ihm die Gesamtrechnung über 58,80 DM. Nun rechnet jeder der Freunde aus, was er zu zahlen hat. Lothars Rechnung ist am höchsten, sie beträgt 7,30 DM mehr als die Siegfrieds, der am wenigsten zu zahlen hat: genau 2 DM weniger als Hanns. Wieviel muß jeder bezahlen?

Nach 4.1.1. sind diese Aufgaben wie folgt zu kategorisieren:

A 1,3	:	B 2a,d;	II;	L2
A 7	:	B 2a,d;	II;	S
A 9	:	B 2a,d;	II;	L1
A 2,5	:	A 2b;	I;	M
A 4	:	B 1b;	I;	L2
A 6	:	C a,e;	II;	L1
A 8	:	B a,e;	II;	L2

Den Textaufgaben wurden die Handlungsstrukturen I (A2, 4, 5) und II zugrunde gelegt. Aufgaben 2 und 5 wurden in MUS, die übrigen in MTS formuliert. Bei Aufgaben 1, 4 und 9 liegen umfangreiche Sachverhaltsbeschreibungen mit irrelevanten Informationen vor, bei Aufgabe 7 wurde möglichst knappe Sachinformation gewählt.

Unter Anwendung von Strategie 1 ist zur Lösung der Aufgaben 2, 4, 5 und 7 keine Umordnung der vorgegebenen Textinformationen erforderlich, nach Mathematisierung der expliziten Textrelationen sind alle zur mathematischen Lösung erforderlichen Elemente verfügbar.

Aufschluß über die Genese von a-Fehlern wurde von A 1, 3 und 9

erwartet. Diese Aufgaben sind bezüglich der implizit enthaltenen Informationen und ihrer semantischen Schwierigkeiten gestuft:

A 1: Zur Ermittlung des Prozeßoperators ist aus der Differenz von Sparsumme und Kaufpreis in einer zweiten Rechnung der Zuschuß des Vaters zu ermitteln. Der Hinweis zur Differenzbildung ist implizit im Textteil: *"... das noch fehlende Geld ..."* enthalten.

A 3: Zur Ermittlung des Prozeßoperators ist die Textrelation *"... vor sechs Jahren ..."* sowohl auf das Alter der Großmutter wie auf Andreas Alter zu beziehen. Dieser Transfer muß aus einer Sachanalyse folgen, erst hiernach kann eine mathematische Operation entwickelt werden.

A 9: Zur Lösung dieser Aufgabe ist die Doppelrelation *Lothar - Hanns - Siegfried* in zwei Einzelrelationen durch Bezug auf eine Person aufzulösen.

Nach den Erfahrungen der Erkundungsstudie wurden Standardisierungsdiagramme gemäß dem in Abschnitt 3.3. dargestellten Verfahren entwickelt und zur Erleichterung der Analysen Standardisierungen nach Strategie 2 in diese Diagramme einbezogen.
Aus Vergleichen dieser Diagramme mit den Diagrammen realer Lösungsprozesse wurden Aufschlüsse zu Thesen 1 und 2 erwartet.

5.1.3. Untersuchungsmethoden

Die Textaufgaben wurden im Dezember 1980 zwölf an der Erkundungsstudie beteiligten Schülern, die sich (bei Hausaufgabenerlaß) freiwillig zur Verfügung stellten, zum Lösen vorgelegt. Jeweils wechselnde Vierergruppen wurden zu verschiedenen Terminen in 7-tägigem Abstand dem Versuchsleiter und zwei besonders instruierten Hilfspersonen zugeteilt. Die einzelnen Schüler bearbeiteten in jeweils 45-minütigen Sitzungen drei Aufgaben.
Die Bearbeitungsfolge wurde hierbei freigestellt, die Schüler wurden aufgefordert, alle Überlegungen während der Bearbeitung laut zu äußern. Die Interviewer enthielten sich aller Kommentare, bekräftigten verbale Äußerungen der Probanden mit "hm", "aha", "gut", o.ä., selbst dann, wenn das Vorgehen offensichtlich falsch war.
Alle Sitzungen wurden mit Tonbandgeräten aufgezeichnet, die Interviewer fertigten ergänzende schriftliche Protokolle. Von den Tonaufzeichnungen wurden später schriftliche Wortprotokolle und Prozeßdiagramme gefertigt.

Die Methode des LAUTEN DENKENS wurde dann problematisch, wenn einzelne Schüler den Lösungsweg nicht kommentierten. Hier wurden Rückfragen der Interviewer erforderlich, die Untersuchungsmethode veränderte sich hierdurch mitunter zum "Nachträglichen Lauten Denken", selten zum Interview. Dieses "Nachträgliche Laute Denken" kam auch dann zustande, wenn Schüler einen Lösungsschritt vollzogen und ihn erst anschließend kommentierten.
Aus pädagogischen Gründen besprachen die Interviewer nach been-

digter Bearbeitung der vorgelegten Aufgaben besonders falsch gelöste Aufgaben mit den Schülern oder versuchten, ergänzende Informationen zu erlangen.

5.2. Untersuchungsergebnisse

Die Untersuchung erbrachte eine wahre Datenflut, aus der die für diese Untersuchung relevanten Daten zu isolieren waren. Viele interessante und noch verfolgenswerte Details mußten unberücksichtigt bleiben.
Besonders schwierig wurde die Isolierung von Einzelmathematisierungen dann, wenn bei Verbalisierungen durch gleichzeitig ablaufende Denkprozesse verschiedene Sprachebenen sichtbar wurden oder, bei schlechten Verbalisierern, einzelne Phasen nicht erkennbar wurden.

So sind die Prozeßdiagramme mitunter eine Reduktion des theoretisch Beobachtbaren, über das tatsächlich Beobachtete auf die dargestellten Einzelschritte und sind trotz aller gegenteiliger Bemühungen sicherlich nicht immer frei von subjektiven Entscheidungen.

Bei der Darstellung der Ergebnisse wurde zur besseren Kennzeichnung ein Ersetzen der Schülernummern der Erkundungsstudie durch die Großbuchstaben A - N erforderlich, zur Identifizierung sei auf Anhang S.134 verwiesen.

Als zusätzliche Fehlertypen wurden klassifiziert:

b1-Fehler : Rechenfehler,
b2-Fehler : Fehler durch mangelnde Rechenfähigkeiten,
a31-Fehler: Fehler durch Nichtinversionen von Textrelationen,
a32-Fehler: Decodierungsperseverationsfehler.

Einen Überblick über die Ergebnisse entnimmt man Tabellen 2 und 3.

Tabelle 2: Übersicht über richtige und falsche Lösungen, geordnet nach Strategieanwendung und Handlungsstruktur. (* : keine Strategieanwendung erkennbar)

	angewandte Strategien										
	1		2		3		1/2		2/3		*
	r	f	r	f	r	f	r	f	r	f	
Handlungsstruktur I A 2, 4, 5	10	5	6	11			2	1		1	
Handlungsstruktur II A 1, 3, 6, 7, 8, 9	8	2	8	37	7	4		1			5
Gesamt	18	7	14	48	7	4	2	2		1	5

Tabelle 3

Tabellarische Zusammenfassung der Ergebnisse der Hauptstudie

SS \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	- a31 M2 2	+ 2	- a2 M2 2	- a2 a31 M1 M2 2	- a32 M1 1 2	- a4 M2 2	A a1 b2 M3 2	- b2 M2	- a1 a31 b2 M2 M3 2
B	- a31 M2 2	+ 2	- a2 M2 2	+ 2	A M1 1	A b2 M3 2	A M2 2	- b2 M2	A a1 a4 b2 M2 M3 2
C	+ 2	+ 1	- a2 M2 2	+ 2	+ 1	A b2 M3 2	A M2 2	+ 3	A b2 M4 2
D	+ 2	+ 2	- a2 M2 2	+ 1 2	+ 1	A b2 M3 1	+ 1	A b2 M2	+ 1
E	- a31 M2 2	- a31 M1 2	- a2 M2 2	- b1 2	- a32 M1 2 3	- a4 M2 3	+ 3	+ 3	+ 3
F	+ 2	+ 1	- a1 a2 M2 2	+ 1	- a1 a4 b1 b2 M1 1	- a4 a5 M2 2	A b2 M3 3	+ 3	A b2 M3 3

Auswertungsschlüssel

Die Daten sind wie folgt angeordnet

Bewertung:

+ richtige Lösung
- falsche Lösung
A Abbruch des Lösungsverfahrens

Fehlerort:

M1 Informationsaufnahme
M2 Informationsanalyse
M3 Strategieentwicklung
M4 Codierung 1

Fehlertyp:

a1 falsche Operatorfolge
a2 Auslassen von Operatoren
a31 Nichtinversion von Textrelationen
a32 Decodierungsperseverationsfehler
b1 Rechenfehler
b2 Fehler durch mangelnde Rechenfähigkeiten

SS \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
G	+ 2	- a31 a4 M1 M2 2	- a2 M2 2	+ 2	- a2 a32 M1 1 2	- b2 M3 2	- a1 b1 b2 M3 2	- b1 3	- a2 b2 M2 M3 2
H	+ 2	+ 1	- a2 M2 2	+ 1	+ 1	- b2 M3 2	+ 1	+ 2	+ 1
K	+ 1	+ 1	- a2 M2 1 2	+ 1 2	A M1 1	- a4 M2 2	- a1 b2 M3 1 2	+ 3	- a1 b2 M2 M3 2
L	- a1 M1 2	+ 1	- a2 M2 2	- a2 M1 M2 2	A a31 a4 b1 M1 1	- a4 M2 2	A a1 b2 M3 2	A b2 M3	+ 1
M	- a1 a2 M1 2	- a31 M1 2	+ 2	- a1 M1 2	- a4 M1 1	- a4 M2 2	A a1 b2 M3 2	+ 3	A a1 a31 b2 M2 M3 1
N	+ 2	- b1 2	- a2 M2 2	- a1 a31 M2 M3 2	- b1 2	- a4 M2 2	+ 1	A b2 M3	+ 1

Auswertungsschlüssel (Forts.)

Lösungsstrategie:

1 Lösung durch lineare Gleichung
2 Lösung durch Rückwärtsrechnen
3 Lösung durch TaE-Verfahren

Bei Aufgabe 1 wandten außer S K alle Schüler Strategie 2 an. SS C, D, F, G, H, K und N lösten die Aufgabe richtig, bei den übrigen Schülern traten folgende Fehler auf:

SS A, B und E gingen von der Annahme aus, *1120* DM sei der Preis des teureren Mopeds und wandten statt des erforderlichen Additionsoperators den Subtraktionsoperator SO1:= -280 an.

S A ermittelte den Preis des billigeren Mopeds mit *840* DM, halbierte dann *1120* und berechnete aus der Differenz von *840* und *560* den Zuschuß mit *280* DM.

S E bezog die Sparsumme auf das billigere Moped und errechnete einen Zuschuß von *420* DM.

S B berücksichtigte TR1 (*soll doppelt soviel kosten*) nicht und gelangte so zu dem Schluß, Michael besäße genügend eigenes Geld zum Mopedkauf - nach nochmaliger Informationsaufnahme gelangte er zu der Ansicht, Michael behielte noch Geld übrig.
Offenbar ermittelte er die Sparsumme mit *1120* DM, den Preis des billigeren Mopeds mit *840* DM und gelangte so zum Schluß, Michael benötige keinen Zuschuß (Anhang 7.4.1.).

S L ging davon aus, Michael kaufe das teurere Moped, ermittelte richtig dessen Preis mit *1400* DM und berechnete *700* DM als Zuschuß des Vaters.

S M nahm *1120* DM als Preis des teureren Mopeds an, halbierte diese Summe und erklärte *560* DM als Zuschuß des Vaters.

Zusammenfassung

TR1 wurde für SS A, B und E zur Schlüsselinformation, der alle übrigen Informationen nachgeordnet wurden. Bei diesen Schülern führte die Textanalyse zu Sachfehlkonzepten und hierdurch zu a31-Fehlern.
Offenbar durch den Signalcharakter von TR1 bedingt, vernachlässigten SS B, L und M lösungsrelevante Informationen. Bei S B ist auch dieser Fehler der Informationsanalyse zuzurechnen, die a-Fehler bei SS L und M hingegen der Informationsaufnahme.

Aufgabe 2 (Anhang 7.4.2.) wurde von SS C, F, H, K und L nach Strategie 1, von SS A, B, D, E, G, M und N nach Strategie 2 bearbeitet. Dabei traten bei SS E, G, M und N folgende Fehler auf:

SS E, M und N leiteten richtig aus TR1 (*das Vierfache*) den zu Strategie 2 erforderlichen Divisionsoperator MO-1:= :4 ab, nahmen die entsprechende Inversion bei TR2 (*vermindert um 380*) hingegen nicht vor.

S E verbalisierte seine Strategie nach einmaligem Textlesen so:

1 E *Also hier:*
2 *Das Vierfache einer Zahl*
3 *vermindert um 380.*
4 *Da rechne ich:*

1400 minus 380
und dann guck ich durch,
teil ich durch 4
und seh was hab ich.

Während S E und S M diesen Fehler beibehielten, korrigierte ihn S N nach nochmaligem Textlesen. Allerdings unterlief ihm im weiteren Verlauf der Rechnung der Divisionsfehler *1780 : 4 = 44,5*, der von ihm trotz Probe (*44,5 · 4 = 1780*) nicht erkannt wurde.

S G's Analyse des Textes führte zu völlig anderer Vorgehensweise:

G *(liest)*
Das Vierfache einer ...
I *Ja?*
G *Ich weiß nich genau,*
muß ich jetzt die 1400 mal 4 nehmen
oder ... (lacht)
(liest halblaut)
Das Vierfache einer Zahl
vermindert um 380.
Also ...
naja, die 1400 mal 4 nehmen.
(notiert: $\frac{1400 \cdot 4}{5600}$ *)*
I *Hm.*
G *Gibt 5600.*
I *Hm.*
G *Das jetzt,*
da nemm ich noch
die 380 mal 4
und zähl dann des zu den 5600 dazu.
I *Warum?*
G *Ja, weil die Zahl, die 1400,*
vermindert worden is um 380.
Also müßte es normal 1780 heißen.
I *Hm.*
G *(notiert:* $\frac{380 \cdot 4}{1520}$ *)*
Und da hab ich jetzt 1520.

27 *Und die 5600 und die 1520,*

28 *die zähl ich jetzt zusammen,*

29 *da hab ich dann die Endsumme.*

30 *Das wärn*

31 *(notiert:* 5600
+1520
7120)

32 *7120.*

Aus TR2 wurde richtig der Additionsoperator SO-1:= +380 abgeleitet, die für Strategie 2 erforderliche Inversion aus TR1 erfolgte jedoch nicht, vielmehr wurde der Multiplikationsoperator MO:= ·4 nicht nur auf 1400, sondern auch auf TR2 bezogen. Hierdurch erfolgte eine Veränderung des Sinngehalts dieses Textsegments auf: *"Das Vierfache einer um 380 verminderten Zahl."*

Zusammenfassung

Die von TR2 ausgehende Signalwirkung war bei SS E und M offenbar so stark, daß die Codierung -380 erfolgte. Somit liegen typische a31-Fehler vor. S G gelangte bei der Informationsanalyse zudem zu einem Sachfehlkonzept, das bei ihm den a4-Fehler verursachte.

Aufgabe 3 bearbeiteten außer S K alle Schüler nach Strategie 2. Andreas Alter wurde nur von S M richtig mit 26 Jahren errechnet, S F ermittelte 16, alle übrigen Schüler 20 Jahre. Sie bezogen TR1 (*vor sechs Jahren*) lediglich auf das Alter der Großmutter, nicht jedoch auf Andreas Alter.

Typisch ist hierfür S C's Vorgehensweise, der auch nach der Probe keinen Verfahrensfehler feststellte:

C *Also isse 20.*

I *Hm, hm.*

C *Jo, ... fertich.*

I *Sehr schön.*
Bist du übrigens sicher, daß Andrea 20 ist?

C *Moment.*
20 mal 3 is 60,
plus 6 is 66.
Ja, ich bin sicher, ganz sicher.

Obwohl alle zur Berechnung erforderlichen Elemente in der Probe enthalten sind, gelang der Schluß: 'Andrea war vor 6 Jahren 20 Jahre alt', nicht.

Schwierigkeiten, TR1 richtig in die Lösungsstrategie einzufügen, wurden bei S F beobachtet:

1 F *Ich nemm jetzt die letzte.*
2 I *Ja gut.*
3 F *(liest)*
4 *Da muß mer 66 durch 3 teilen.*
5 I *Hm.*
6 F *Dann kommt das raus, was sie ist.*
7 *Nee! Das war ja vor 6 Jahren.*
8 I *Hm.*
9 F *Dann muß mer ja noch*
10 *minus 6 rechnen,*
11 *weils vor 6 Jahren war,*
12 *also 6 Jahre davor.*
13 I *Wie?*
14 F *Also, die Oma is 3 mal so alt wie sie.*
15 I *Aha!*
16 F *Also vor 6 Jahren war die Oma genauso,*
17 *3-mal so alt wie sie.*
18 *Jetzt isse 66.*
19 I *Hm, hm.*
20 F *Da muß mer 66*
21 I *Hm.*
22 F *geteilt durch 3 rechnen*
23 *und minus 6.*

Die Informationsanalysen sind aufschlußreich:
Bei der Erstanalyse wurde TR1 nicht berücksichtigt, die Division somit zur zentralen Operation.
In die Zweitanalyse wurde der Zeitfaktor aufgenommen, die zugehörige Subtraktion nun jedoch als der Division nachgeordnete Operation eingestuft.
Somit ist der a1-Fehler nicht auf die Informationsaufnahme, sondern auf die Informationsanalyse zurückzuführen.

S K versuchte zunächst Strategie 1 anzuwenden, die Definition des 'x' bereitete ihr jedoch große Schwierigkeiten. Nach mehrfachen Versuchen:
Andrea:= x, Andrea:= $x - 6$ (!), Großmutter:= x,
wechselte sie schließlich zu Strategie 2 und errechnete Andreas Alter mit 20 Jahren, obgleich ihr zuvor doch klar war, daß dies Andreas Alter vor 6 Jahren entsprach (Anhang 7.4.1.).

Zusammenfassung

Außer S M gelang den Schülern der folgende Schluß nicht:

"Wenn die Großmutter vor sechs Jahren jünger war als heute, dann gilt dies auch für Andrea."
Die strukturelle Koppelung: ... *genau vor sechs Jahren war meine Großmutter* ... verhinderte dies und führte zu Fehllösungen. Der beobachtete a2-Fehler ist somit der Informationsanalyse zuzurechnen und durch das Unvermögen der Schüler, die implizite Information zu erkennen und zu decodieren, bedingt.

Aufgabe 4 wurde von SS F und H durch Anwendung von Strategie 1 gelöst, SS A, B, C, E, G, L, M und N verfuhren nach Strategie 2 während SK beide Strategien anwandte.
Bei SS A, C, D, K, L, M und N traten bei TR2 durch das Wort *dann* bedingte Transformationsschwierigkeiten auf, die zur Frage führten: "Ist Gunthers Briefmarkensammlung vor oder nach dem Verkauf von 56 Marken halb so groß wie die Bernds?"

Deutlich wurde dies bei S K, die folgendermaßen argumentierte:

1 K *(liest)*
2 *Also ich hab mir jetzt die zwei durchgelesen*
3 *und da bin ich zu dem Entschluß gekommen,*
4 *daß x äh,*
5 *daß x der Wert is,*
6 *den er nach ...*
7 *X is der Wert von den Briefmarken, die er hat,*
8 *vor der Sammlung,*
9 *äh, vor der Auktion hat.*

Sie verbalisierte und notierte nach interner Division von *2288 : 2* :

$$x - 56 = 1144$$
$$x = 1200$$

und bemerkte abschließend:

K *So, hm.*
Ja, soviel hat er dann gehabt,
Briefmarken, nach der Auktion.

"Die 1200 verteilt an 4" führte schließlich zur Lösung der Aufgabe in der Form: *"300 Marken hat er gehabt."*

Aus der Vorgehensweise von S N wird die Zeitproblematik ersichtlich:

1 N *(liest und klopft mit dem Bleistift auf den Tisch)*
2 *Ich hab da ma ne Frage.*
3 I *Na bitte.*

4 N *Will der noch verkaufen*
5 *oder hat er die schon verkauft*
6 *an dem Tag hier?*
7 I *Ja du, dann lies es doch am besten nochmal durch.*
8 N *(liest laut)*
9 *Morgen bei der Auktion in Frankfurt*
10 *will er 56 Briefmarken verkaufen.*
11 *Dann hat er noch nicht verkauft.*
12 *Da nemm ich ... (stöhnt)*
13 *die 2288 Marken,*
14 *teil sie durch 2.*
15 *Weil er ja nur halb soviel hat.*
16 *(notiert: 2288 : 2 = 1144)*
17 *Und da bekomm ich 1144 raus.*
18 *Dann ...*
19 *Nee.*
20 *(liest)*
21 *Hm, hab ich en Fehler gemacht.*
22 *(streicht die notierte Zeile durch)*
23 *Da nemm ich die 2288 minus 56,*
24 *(notiert: 2288 - 56 = 2232)*
25 *das sin ...*
26 *Dann nemm ich das Ergebnis,*
27 *teil das durch 2.*
28 *(notiert: 2232 : 2 = 1116)*
29 *Da hab ich des raus,*
30 *un teil des durch 4.*
31 *(notiert: 1116 : 4 = 279)*
38 *Da hab ich 279 raus.*
39 *Und soviel Marken hat er am Anfang gehabt.*
40 *(notiert: 279 Marken hatte er als er anfing zu sammeln.)*

Der Schluß: *"Dann hat er noch nicht verkauft."* (Zeile 11), kam durch die Art der Informationsaufnahme zustande, der folgende Satz wurde nicht in die Analyse einbezogen.
Nochmaliges Textlesen führte zur Klärung des Sachverhalts in der Form: "Wenn Gunther verkauft, hat er halb so viele Marken." Daher wurde zunächst subtrahiert (a31-Fehler) und anschließend dividiert. Das zuvor verfolgte Strategiekonzept ging verloren

und wurde durch das Handlungskonzept der Textaufgabe überdeckt, so daß der a1-Fehler als Strategiefehler anzusehen ist.

S A ging zunächst von der Vorstellung aus, Gunther besäße *2288* Briefmarken und subtrahierte wie S N: *2288 - 56 = 2232*. Nach nochmaligem Textlesen dividierte sie *2288* durch *2*, den Quotienten anschließend durch *4*. Die gleiche Vorgehensweise wurde auch bei S L beobachtet.
Der Markenverkauf wurde hier als zeitlich getrennte, nicht die Strategie betreffende, irrelevante Information eingestuft, der a2-Fehler ist somit auf eine Informationsfehlanalyse zurückzuführen.

Eine Textfehldecodierung wurde bei S M beobachtet. Hier führte das in der idiolektalen Wiedergabe des Textes beobachtete Auslassen des Wortes *dann* zur Fehlanalyse des Sachverhalts.

SS C und D wandten zunächst ebenfalls den Subtraktionsoperator SO:= -56 an. Beide stellten allerdings diesen Fehler bei der Probe fest, SC korrigierte ihn, SD wechselte zu Strategie 1.

Zusammenfassung

Die durch die Nichtinversionen verursachten a31-Fehler sind auf mit dem Verb *verkaufen* verbundene Subtraktionsvorstellungen zurückzuführen, während die beobachteten a1- und a2-Fehler auf Fehlanalysen des zeitlichen Handlungsablaufs beruhen.

Aufgabe 5 wurde von SS C, D (Anhang 7.4.2.) und H völlig richtig gelöst. SS B, C, D, F, H, K, L und M verfuhren durchgängig nach Strategie 1, SS A und G wechselten nach Lösungsschwierigkeiten von Strategie 1 zu Strategie 2, die nur von S N von Anfang an konsequent beibehalten wurde.

S E versuchte zunächst, die Aufgabe nach Strategie 3 durch Einsetzen angenommener Zahlen zu lösen, stellte jedoch bereits nach dem ersten Versuch die Aussichtslosigkeit dieses Unterfangens fest und wechselte zu Strategie 2 (Anhang 7.4.2.).

Besondere Schwierigkeiten bereitete der Terminus *Differenz*, dessen Bedeutung SS B und C erfragten. Decodierungsschwierigkeiten wurden auch bei SS F, K, L und M beobachtet, inwieweit sie die Ursache der Codierungsfehler von SS M und F darstellten, konnte nicht eindeutig geklärt werden.

Trotz Decodierungshilfe gelang es S B nicht, den Aufgabentext zu decodieren. Er bildete zwar die Differenz *5x - 11*, brach dann jedoch nach längerem Nachdenken die Bearbeitung der Aufgabe ab.

Bei S K erfolgte der Abbruch an gleicher Stelle. Hier konnten als Gründe Decodierungsschwierigkeiten und - sicherlich damit verbunden - Schwierigkeiten beim Aufstellen der Gleichung festgestellt werden.

S L wandte auf obige Differenz statt des erforderlichen Multiplikationsoperators den inversen Divisionsoperator $MO2^{-1}$:= :3 an, es gelang ihr jedoch nicht, die Gleichung *5x - 11 : 3 = 237* zu lösen, sie brach ebenfalls ab.

S M codierte TR3 als Additionsoperator *+3* (Anhang 7.4.2.), S F als Subtraktionsoperator *-3*. S F stellte den Fehler bei der Probe fest, entwickelte nun die Gleichung $5x - 11 \cdot 3 = 237$ und gelangte zur Lösung *16*. Es gelang ihr nicht, den bei der erneuten Probe festgestellten Fehler zu korrigieren.

Die gleiche Gleichung wurde von S A (Anhang 7.4.3.) und G entwickelt, die sie allerdings nicht weiter bearbeiteten, sondern zu Strategie 2 wechselten. S A behielt hier den Multiplikationsoperator MO1:= .5 bei und gelangte zur Lösung *450*.
S G hingegen behielt den Subtraktionsoperator SO:= -11 bei, ließ jedoch den Multiplikationsoperator MO1:= .5 aus und erhielt *68* als Lösung.

Der Subtraktionsoperator SO:= -11 wurde auch von S E angewandt. Auch ihm gelang es nicht, das falsche Ergebnis, das er bei der Probe feststellte, zu korrigieren.

Zusammenfassung

Die bei SS A, E und G aufgetretenen Fehler durch Nichtinversionen sind von a31-Fehlern bei Nicht-MUS-Texten streng zu trennen. Sie sind auf Beibehaltung früherer Decodierungsmuster beim Strategiewechsel zurückzuführen und werden hier als *Decodierungsperseverationsfehler* (a32-Fehler) bezeichnet.
Die übrigen Fehler (hierzu werden auch die Abbrüche gezählt) wurden durch

- fehlende Decodierungsmuster aufgrund unzureichenden MUS-Repertoires (SS B, F, K, M)

  und

- mangelnde Rechenfertigkeit (b1-Fehler) und Rechenfähigkeit (b2-Fehler)

verursacht.

Aufgabe 6 wurde von keinem Schüler richtig gelöst. SS A, E, K, L, M und N dividierten die angegebenen Zeiten (20, 30 Minuten) durch *2*, addierten die Ergebnisse und gaben *25* Minuten als Füllzeit an.

SS H und G (Anhang 7.4.1.) dividierten ebenfalls durch *2*, teilten die über *10* Minuten hinausgehende Zeit wiederum durch *2* und addierten die so erhaltenen *2,5* Minuten wieder zu *10*. Der Behälter wurde demnach in *12,5* Minuten gefüllt.

Recht aufschlußreich ist die Vorgehensweise von S H:

1 H (liest)
2 Der eine braucht 20 Minuten
3 und der andere 30.
4 Und wenn beide 20 Minuten brauchen würden,
5 dann würden se 10 Minuten zusammen brauchen.

6 *Der eine braucht aber länger.*
7 *Dann brauchen die 12,5 Minuten.*
8 I *Na dann schreibs auf.*
9 H *Da weiß ich net, ob das richtig is.*
10 *Aber anders kann ich mirs net erklärn.*
11 *Wenn einer 10,*
12 *der andere fufzehn brauch.*
13 *Und die Hälfte von 5 is 2,5,*
14 *und das hab ich dann draufgezogen*
15 *un da muß das eigentlich hinkommen.*
16 *(notiert: 12,5 Minuten)*

Hier wird neben der Gleichzeitigkeit auch die unterschiedliche Füllgeschwindigkeit berücksichtigt.

S B fand selbst nach längerem angestrengten Lesen keinen Lösungsansatz und gab auf:

1 B *(liest)*
2 *Un wemmer die durch 2 teilt?*
3 *Die ... (murmelt unverständlich vor sich hin)*
4 *Geteilt durch 2.*
5 *Des gibts net!*
6 *Wie rechnet mer denn des?*
7 *Des hammer noch nie gehabt.*
8 I *Achso, hm, hm.*
9 B *(stöhnt)*
10 *Ich mach doch lieber ne andre.*

S F ging von zwei nacheinander zu füllenden Behältern aus, assoziierte offenbar einen völlig verschiedenen Sachverhalt:

1 F *(liest)*
2 *Ja, das sind 2 Behälter,*
3 *der eine braucht 20 Minuten,*
4 *der andere 30.*
5 *Und die hab ich zusammengezählt.*
6 *Und wie lang es dauert,*
7 *wenn se rausfließen,*
8 *das ist die Frage.*
9 *Un des is 50 Minuten.*

S C war sicher, daß die Füllzeit weniger als *20* Minuten betrüge, fand jedoch keinen Rechenansatz und gab auf.

S D suchte als einziger nach einer Lösung mit 'x'. Er gab auf, als er hierzu keine Möglichkeit fand.

Zusammenfassung

Nur SS H und G, die mit *12,5* eine recht gute Näherung erzielten, gelang es, zum Kern des Sachverhalts, zum eigentlichen Problem vorzustoßen.
Alle übrigen Schüler erkannten nur die Problemdimension Füllzeit, nicht die damit implizit verknüpfte Dimension verschiedener Füllgeschwindigkeiten und ermittelten die Füllzeit mittels Durchschnittsrechnungen.
Interessant ist S D's Verhalten, der, fixiert auf Strategie 1, nach seinem Scheitern keinen weiteren Lösungsversuch unternahm.

Die bei SS A, E, K, L, M und N beobachteten a4-Fehler sind sämtlich auf die beschriebenen Fehlanalysen des Sachverhalts zurückzuführen. Die Abbrüche bei SS B, C und D beruhten wie die Fehllösungen bei SS G und H auf fehlenden mathematischen Fähigkeiten (b2-Fehler).

Aufgabe 7 wurde von SS D, H und N nach Strategie 1, von SS A, B, C, G, L und M nach Strategie 2 bearbeitet, SS E und F wandten Strategie 3 an, S K wechselte während der Bearbeitung von Strategie 1 zu Strategie 2.
SS D, H und N (Anhang 7.4.2.) lösten die Aufgabe ohne beobachtbare Schwierigkeiten richtig. Bei den übrigen Schülern wurden folgende Fehler beobachtet:

S K hatte sowohl Schwierigkeiten bei der Variablendefinition wie beim Aufstellen der Gleichung:

1 K Thomas nenn ich x .
2 Hat 6 mehr.
3 Also Thomas x plus 6
4 und x minus 4 ist Daniela.
5 (liest)
6 Nee, so geht das nich.
7 I Wieso?
8 K Weil es ja mehrere x gibt.
9 Und wenn ich das x dann auf eine Seite bringen soll,
10 das klappt ja nich, wenn auf der anderen Seite kein x
11 mehr steht.

Sie wechselte zu Strategie 2. Das außerordentlich komplexe Gleichverteilungsprinzip, das sie hierbei anwandte, wird im folgenden dargestellt.

Zunächst stellte S K durch Division (*58 : 4 = 14,5*) Punktgleichheit zwischen den vier Personen her. Sie addierte danach Birgits und Martinas Punktzahlen (*29*), subtrahierte hiervon *6*, addierte sie zu *14,5* und errechnete so Thomas Punktzahl mit *20,5* Punkten. Die Differenz Thomas - Birgit, Martina, wurde entsprechend TR2 hergestellt, jedoch auf die Gesamtpunktzahl *29* bezogen. Intern führten offenbar TR2 und TR4 zu einer Analyse der Form: "Thomas erreichte 6 Punkte mehr als beide zusammen", die Einzelpunktzahlen (*14,5*) blieben unverändert.
Danielas Punktzahl wurde durch Subtraktion von *4* Punkten errechnet (*10,5*), die *4* Punkte dann erneut zwischen Thomas, Birgit und Martina aufgeteilt. Nach Addition von *1 1/3* erhielten sie je *2 5/6* bzw. *11 1/6* Punkte (Anhang 7.4.2.).

SS A, G und L gingen ebenfalls nach dem Gleichverteilungsprinzip vor und dividierten zunächst die Anzahl der Gesamtpunkte durch *4*. S L stellte sodann durch Addition von *6* zur Durchschnittspunktzahl (*14,5*) den Unterschied zwischen Thomas, Birgit und Martina, durch Subtraktion von *4* den Unterschied zu Daniela her. S L bemerkte zwar bei der Probe ihr fehlerhaftes Ergebnis, fand jedoch keinen Weg, dies zu korrigieren.

S G unterlief bei gleichem Vorgehen der Subtraktionsfehler *14,5 - 4 = 9,5*, so daß er als Gesamtsumme *59* Punkte erhielt. Den Ausgleich erreichte er durch Subtraktion von *0,5* Punkten von Birgits und Danielas Punktzahl (Anhang 7.4.2.).

S A's Vorgehen entsprach dem von SS L und G, allerdings bezog sie TR3 auf TR2, subtrahierte so *4* Punkte von Thomas' Punktzahl und errechnete für Daniela *16,5* Punkte. Auch ihr gelang es nicht, den Fehler, den sie bei der Probe bemerkte, zu lokalisieren.

Bei SS B, C und M stand zunächst die Analyse der Punktunterschiede im Vordergrund: "Erreichte Daniela vier Punkte weniger als Birgit und Martina oder als Thomas?" So bezogen SS B und C nach Feststellung der Punktgleichheit von Birgit und Martina die Differenz auf Thomas. Beiden Schülern war der Text zu komplex, die Analyse zu schwierig, trotz wiederholtem Textlesen gelang ein Strategieansatz nicht, sie brachen ab.

S M subtrahierte zunächst *6* und *4* Punkte von der Gesamtpunktzahl. Die verbleibenden *48* Punkte sah sie als die Summe der Punkte von Birgit und Martina an.

1	*M*	*Von 58 zieh ich erst ma 6 ab für den Thomas,*
2		*weil ich ja erst mal rauskriegen will,*
3		*wieviel die Birgit und die Martina haben.*
4	*I*	*Hm.*
5	*M*	*Wenn ich von 58 6 abziehe,*
6		*bleiben noch 52.*
7		*(notiert: 58 - 6 = 52)*
8	*I*	*Hm.*
9	*M*	*Von den 52 tu ich widder wie oben*

10 *4 Punkte für die Daniela abziehn.*
11 *(notiert: 52 - 4 = 48)*
12 *Zieh ich also 4 ab, wärn 48.*
13 *Dann hat die Birgit 24 Punkte*
14 *(notiert: B = 24)*
15 *und die Martina*
16 *(notiert: M = 24).*
17 *Ja, wenn die Birgit und die Martina 24 ham,*
18 *also 48,*
19 *dann bleiben ja nur noch 4 Punkte fürn Thomas*
20 *und die Daniela.*
21 *Nee, das geht net.*
22 *(liest)*
23 *Das kammen doch auch durch 4 teilen.*

Offenbar war S M's interne Einschätzung der Punktzahlen von Tomas und Daniela doch höher als 6 bzw. 4 Punkte, so daß sie ihren Versuch abbrach und zur Division *58 : 4* wechselte.
Das weitere Vorgehen S M's entpsrach dem von S L, auch sie stellte bei der Probe ein Mehr von 2 Punkten fest, vermochte den Fehler jedoch nicht zu lokalisieren und gab schließlich auf.

SS E und F nahmen für Birgit und Martina jeweils bestimmte Punktwerte an, errechneten hieraus Thomas' und Danielas Punkte, bildeten die Gesamtsumme und verglichen sie mit der gegebenen Summe. Während S E hier recht geschickt approximierte und bald zum richtigen Ergebnis gelangte (Anhang 7.4.1.), gab S F nach mehreren vergeblichen Versuchen frustriert auf.

Zusammenfassung

Zwei wesentliche Fehlerursachen wurden bei der Analyse der Schülerbearbeitungen sichtbar:

- Fehlanalysen der Doppelrelationen des MTS-Textes, durch die Sachverhalte verändert und somit a1- und a4-Fehler verursacht wurden

  und

- Fehler durch unzureichende mathematische Fähigkeiten. Zwar versuchten SS A, F, G, K, L und M die Aufgabe nach Strategie 2 zu lösen, sie scheiterten jedoch, da sie die hierzu erforderlichen mathematischen Operationen nicht verknüpfen konnten.

Zu Aufgabe 8 gelang es SS L und N nicht, eine geeignete Lösungsmethode zu entwickeln, sie verbalisierten zwar den Text, gaben dann jedoch auf.
SS A und B stellten fest, der Vater sei bereits doppelt so alt wie die Tochter gewesen.

S A formulierte hierzu die Antwort: *"Mit 24 Jahren ist der Vater doppelt so alt."* S B hingegen argumentierte, der Vater könne nur dann doppelt so alt werden, wenn sich das Alter der Tochter nicht verändere. Da dies jedoch nicht möglich sei, sei die Aufgabe nicht lösbar.

S D argumentierte ähnlich:

1 D (liest)
2 Geht ja gar nicht.
3 I Wieso?
4 D Kann nicht gehen,
5 weil es 33 und 12 ist.
6 Wenn man die gleiche Anzahl wie da
7 dazuzählt zu 33,
8 gibts eine höhere Zahl
9 bei der 33 und bei der 12.
10 Es geht also net.

SS K und M addierten jeweils *1* Jahr zum Alter des Vaters und der Tochter hinzu und ermittelten so das Ergebnis. Beide benutzten hierzu eine Tabelle der Form:

33	*12*
34	*13*
⋮	⋮
42	*21*

aus der sie die Anzahl der Additionen ablasen und so die Lösung errechneten.

S G entwickelte ebenfalls eine derartige Tabelle, vermochte jedoch hieraus keine Lösung zu bestimmen. Er begann nach erneuter Informationsaufnahme die Aufgabe durch Annahme verschiedener Zahlen zu lösen. Erst auf Aufforderung des Interviewers, die Tabelle zu benutzen und durch dessen massive Unterstützung, gelangte er zur Lösung.

SS C, E und F approximierten durch Annahme verschiedener Zahlen. S E addierte zunächst *11* und notierte: *V: 44 T: 23*, dann *13* und notierte: *V: 46 T: 25*. Hierauf addierte er kleinere Werte und tabellierte:

33	*12*
38	*17*
40	*19*
41	*20*

Er bemerkte hierzu:

E Es muß dazwischen liegen.
Ein Punkt da,
sind 42.
Ein Punkt da,
sind 21.
In 9 Jahren ist er doppelt so alt.

S F ging zunächst in den Schritten

33 12
44 23
45 24

vor, stockte, überlegte und entwickelte:

43 22
42 21

und notierte als Lösung: *9 J.*

Das Vorgehen S C's war ähnlich. Nach anfänglichem Zweifel über die Lösbarkeit der Aufgabe, schätzte er zunächst die Größenordnung der Lösung ab und gelangte, offenbar durch internen Vergleich, zur Lösung.

S H sah zunächst keine Lösungsmöglichkeit, eine Anwendung von Strategie 1 verwarf sie. Nach längerer Analyse verdoppelte sie schließlich die stets bestehende Altersdifferenz zwischen Vater und Tochter und ermittelte so die Lösung (Anhang 7.4.1.).

Zusammenfassung

Bis auf S G sind alle Fehllösungen bei dieser Aufgabe auf unzureichende mathematische Fähigkeiten (b2) zurückzuführen:
SS L und N verstanden zwar die Aufgabe, vermochten jedoch aufgrund fehlender mathematischer Kenntnisse keine Lösungsstrategie zu entwickeln. SS A und B scheiterten an dem scheinbaren Widerspruch: "Da der Vater bereits doppelt so alt ist, kann er nicht mehr doppelt so alt werde." S D schloß eine Verdoppelung aufgrund gleichbleibender Zahlendifferenz (im Gegensatz zu S H) aus.
S G verfügte zwar über die mathematischen Kenntnisse, vermochte jedoch die entwickelte Tabelle nicht zu interpretieren, so daß hier ein b1-Fehler vorliegt.

Zur Lösung von Aufgabe 9 wandten SS D, H, L, M und N Strategie 1, SS A, B, C, G und K Strategie 2, SS E und F Strategie 3 an.
Die Aufgabe wurde von SS D, E, H, L und N richtig gelöst.
Als besonders schwierig stellte sich der bei der Definition Hanns:= x erforderliche Bezugswechsel der Textrelationen heraus.

S H definierte Hanns als x, notierte sofort die Gleichung $3x - 2 + 7,30 = 58,80$ und kommentierte:

H *Es sind drei Teilnehmer.*
Hanns ist x ,
plus den Betrag von Lothar,
weniger den Betrag von Siegfried.

Die im Text vorgegebenen Relationen wurden ohne weitere Transformationen übernommen. Bei der Probe stellte S H einen Fehler fest, vermochte die Ursache jedoch erst nach nochmaliger Informationsaufnahme und -analyse zu finden:

1 H *Fürn Hanns setz ich x ,*
2 *weil der genau die Mitte hat.*
3 I *Okee.*
4 H *Un das hab ich dreimal.*
5 *Die andern ham genau soviel wie der Hanns,*
6 *bloß der eine hat 7 Mark 30 mehr*
7 *und der andere hat 2 Mark weniger.*
8 *Das hab ich doch da oben hingeschrieben.*
9 *Und zusammen ham se dann so viel.*
10 *Müssen se ja haben.*
11 *Naja also! Is doch ganz logisch.*
12 *Was hab ichn da falsch gemacht?*
13 *Höchstens hier oben was.*
14 *(liest)*
15 I *Geht's nicht?*
16 H *Ei doch. Vielleicht hatter ja ...*
17 *Nee, nee!*
18 *Ja, ja, ma überlegen.*
19 *(korrigiert die Gleichung in: 3x - 2 + 5,30 = 58,80)*
20 I *Warum besserst du aus?*
21 H *Na, der hat ja 7 Mark 30 mehr als der Siegfried.*
22 I *Hm.*
23 H *Also hat der, der Lothar, nur 5 Mark 30 mehr,*
24 *mehr als der Hanns, als x .*
25 *Da muß ich das auskessern.*

Die Schwierigkeit der mit dem Bezugswechsel verbundenen Folgerung: "Siegfried hat 2 DM weniger zu zahlen als Hanns, also zahlt Hanns 5,30 DM weniger als Lothar" und der hierzu erforderlichen Differenzenbildung ist gut erkennbar.

S L unterlief der gleiche Fehler. Sie notierte die Gleichung $x + 7,30 + x - 2 + x = 58,80$, kommentierte sie und bemerkte hierbei den Fehler. Dieses Kommentieren hatte hier Kontrollfunktion: Das verbale Memorieren führte zu erneutem Mathematisieren, zum Vergleich der notierten mit der verbalisierten Codierung und so zur Korrektur.

Auch S M setzte Hanns gleich x, *"Weil über ihn nichts gesagt ist"*, codierte TR2 als *"minus 2"* und bezeichnete Siegfrieds Rechnung mit $x - 2$. Lothars Rechnung betrug nach ihrer Analyse $7,30$ DM:

M Lothars Rechnung ist am höchsten.
Sie beträgt 7 Mark 30.
Also weiß der Lothar schon,
daß er 7 Mark 30 zu zahlen hat.

Dementsprechend schlug sie vor, Lothars Rechnung von der Gesamtsumme zu subtrahieren und entwickelte die Gleichung: $x - 2 + 7,30 = 58,80$, die sie indes nicht löste. Sie verbalisierte vielmehr nach erneuter Informationsaufnahme TR1 und TR2 und brach die Bearbeitung der Aufgabe schließlich ab.

SS A, C und K verteilten den Gesamtbetrag zunächst gleichmäßig unter den drei Personen.
S C gelang es jedoch nicht einen geeigneten Rechenansatz zu entwickeln. Ihm war zwar das Differenzenverhältnis klar, dennoch gelang die Codierung des Unterschieds Hanns-Siegfried nicht. Er gab auf.

Nach S A's Analyse hatte Hanns 2 DM weniger zu zahlen. Sie subtrahierte demgemäß vom Durchschnittswert 2 und ermittelte so Hanns' Rechnungsbetrag. Lothars Rechnungsanteil errechnete sie durch Addition von $7,30$ zum Durchschnittswert. Die Angabe, daß Siegfrieds Rechnung am niedrigsten sei, beachtete sie nicht.

S K berechnete Siegfrieds Anteil durch Subtraktion von 2 und $7,30$ vom Durchschnittswert und kommentierte:

K Weil den Siegfried am wenigsten hat
und den Hanns noch 2 Mark mehr hat
und den Lothar 7 Mark 30 mehr.

Durch Addition von 2 zum Durchschnittswert ergab sich schließlich Hanns' Rechnungsbetrag mit $21,60$ DM.

S G änderte nach Berechnung des Durchschnittsbetrags und erneutem Textlesen seine Strategie. Er decodierte und analysierte:

G 7 Mark 30 ist die höchste Rechnung,
das teuerste Gericht.
Dem Lothar seine Rechnung ist am höchsten.
Sie beträgt 7 Mark 30 mehr

als die Siegfrieds,
der am wenigsten zu zahlen hat,
2 Mark weniger als Hanns.

S G bildete die Differenz *58,80 - 7,30 = 51,50* und verteilte sie unter Hanns und Siegfried. Beide zahlten demnach je *25,75 DM*.

Das gleiche Verfahren wandte S B an. Allerdings stellte er nach erfolgter Division durch *2* den Unterschied zwischen Hanns und Siegfried durch Addition bzw. Subtraktion von *7* her.

S E erreichte im TaE-Verfahren nach insgesamt acht Versuchen die Lösung der Aufgabe. Er nahm verschiedene Beträge für Lothar an, errechnete daraus Siegfrieds' und Hanns' Rechnungsbeträge, summierte, verglich das Resultat mit der gegebenen Summe, schätzte die Unterschiede ab und begann von neuem.

S F gelang es nicht, mit Strategie 3 eine Lösung herbeizuführen, sie gab nach fünf erfolglosen Versuchen auf (Anhang 7.4.2.).

Zusammenfassung

Nach diesen Analysen verfügten SS A, B, C, G, K und M nicht über ausreichende mathematische Fähigkeiten, um diese Textaufgabe nach der von ihnen verfolgten Strategie zu lösen.
Bei SS B, G und M wurde außerdem die Vernachlässigung wesentlicher Informationen beobachtet, so daß der Analyse veränderte Sachverhalte zugrunde lagen.
Sämtliche a31-Fehler konnten auf Nichtinversionen der Textrelationen zurückgeführt werden, *weniger* und *mehr* wurden als *minus* bzw. *plus* codiert.

5.3. Analysen der Untersuchungsergebnisse

5.3.1. Analysen der Prozeßabläufe

Grundsätzlich ließen sich zwei Formen des Prozeßablaufs unterscheiden:

a) Der Prozeßablauf entsprach weitgehend dem postulierten Mathematisierungsmodell.

   Nach Informationsaufnahme, Textdecodierung und -analyse wurde die Anwendung einer Gesamtstrategie beobachtet, die zur Aufgabenrepräsentation auf der MSS-Ebene, zur Ermittlung des mathematischen Operators und zu dessen Transfer führte.
   Verbalisierungen erfolgten hierbei spärlich in IL oder MUS in der Absicht, den Beobachter über vollzogene oder unmittelbar bevorstehende Handlungen zu unterrichten. Diese Verbalisierungen hatten keinen Mathematisierungscharakter.
   Beim Vergleich der Standardisierungs- mit den Prozeßdiagrammen ergaben sich die in Tabelle 4 wiedergegebenen Übereinstimmungen der Diagramme. Es fällt auf, daß Diagrammübereinstimmungen besonders häufig bei A 2, 3 und 4 anzutreffen sind, gleichzeitig aber alle Lösungen von A 3 falsch sind.

A \ S	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N
1						2+		2+			2-	2+
2		2+	1+	2+	2-	1+			1+	1+	2-	2-
3	2-	2-		2-		2-	2-			2-		2-
4		2+			2-	1+	2+	1+	2+	2-		
5	2-			1+		1-		1+		1-		
7				1+								1+
9												1+

Tabelle 4: Übereinstimmungen von Prozeß- und Standardisierungsdiagrammen. 1: Strategie 1, 2: Strategie 2, +: richtige, -: falsche Lösung

Wie die Analyse von A 3 ergab, wurden hier Fehllösungen durch Nichtbeachtung aufgabenrelevanter Informationen erzeugt. Zieht man die zugrunde liegende Handlungsstruktur hinzu, so zeigt sich, daß durch diese Nichtbeachtung die nichtlineare Struktur II zur linearen Struktur I vereinfacht wurde und daher die vorliegenden Diagrammübereinstimmungen auf eine interne Aufgabenrepräsentation mit Struktur I zurückzuführen sind.
Aufgaben 2, 4 und 5 weisen ebenfalls lineare Handlungsstrukturen auf, während den übrigen Aufgaben nichtlineare Strukturen zugrunde liegen. Hier sind kaum Übereinstimmungen zu verzeichnen.

b) Der Prozeßverlauf wich deutlich von den Standardisierungen und somit vom Prozeßmodell ab.

Die Lösungen der Textaufgaben erfolgten in Teilschritten nach folgendem Muster:
Nach erster Informationsaufnahme wurden Textteile decodiert, analysiert, hierzu Teilstrategien entwickelt und Teilrepräsentationen auf der MSS-Ebene abgeleitet.
Dieses Verfahren wurde so lange fortgesetzt, bis bei Strategie 1 die MSS-Aufgabenrepräsentation vorlag. Bei Anwendung von Strategie 2 erfolgte nach jedem Teilschritt die entsprechende mathematische Operation. Das Verfahren war bei Strategie 2 nach dem letzten Teilschritt, der Ermittlung des numerischen Prozeßoperators, abgeschlossen, während bei Strategie 1 dieser Operator nunmehr erst entwickelt wurde.
Diese Prozeßverläufe wurden besonders häufig bei A 7 und A 9 beobachtet.
Verbalisierungen erfolgten bei dieser Vorgehensweise häufig idiolektal und zu allen Prozeßphasen, sie hatten überwiegend Mathematisierungscharakter, Teilstrategien wurden als eng begrenzte Handlungsabsichten verbalisiert.
Insgesamt gestalteten sich die Analysen dieser Prozeßabläufe schwieriger als der unter a) beschriebenen, da mitunter Mathematisierungen ineinanderflossen und scharfe Abgrenzungen erschwerten.

Nach früheren Erörterungen zum Lösungsverlauf können die unter a) und b) aufgeführten Prozeßverläufe (unabhängig davon, ob sie zu richtigen Lösungen führten) wie folgt interpretiert werden:

Bei den unter a) beschriebenen Prozeßabläufen wurden durch die Informationsaufnahme und -analyse vollständige interne Aufgabenrepräsentationen erzeugt, die entweder bereits mit entsprechenden internen Handlungsstrategien verknüpft waren oder zu denen diese Handlungsstrategien intern vollständig entwickelt wurden. Nach Vorliegen dieses Handlungskonzepts erfolgte sukzessives Abarbeiten der Aufgabe in Übereinstimmung mit der Standardisierung.

Im Gegensatz hierzu wurden durch die erste Informationsaufnahme bei den unter b) beschriebenen Prozeßabläufen nur unvollständige interne Aufgabenrepräsentationen erzeugt, so daß erneute Informationsaufnahmen und -analysen erforderlich wurden.
Hier wurden jedoch nicht Strategieteile zu einem internen Lösungsentwurf synthetisiert, vielmehr wurden Teilhandlungen realiter durchgeführt, wobei der Aufgabentext als Leitfaden zum Handlungsablauf diente. Erst nach Vorliegen einer Gleichung (MSS-Aufgabenrepräsentation) bzw. der numerischen Lösung, war eine Gesamtstrategie verfügbar.

Diese Vorgehensweise entspricht der in 3.2.1. beschriebenen Strategieentwicklung aus einem Strategieentwurf, die hier allerdings nicht intern, sondern extern verlief.
Der früher verwendete Begriff Strategieentwurf erschien bei der Analyse der Vorgehensweisen der Schüler häufig als zu stark zielgerichtet. Treffender bringt der Terminus *Strategievermutung* das mitunter eher nach einem TaE-Verfahren tendierende Lösungsverhalten zum Ausdruck.
Die beobachteten Teilhandlungen entsprachen den beschriebenen Sub-TOTE-Einheiten. Die erforderlichen Prüfphasen (T) wurden allerdings nicht beobachtet - möglicherweise verliefen sie intern oder wurden ausgelassen.
Prüfungen des mathematischen Prozeßoperators auf der MSS-Ebene wurden vereinzelt beobachtet, der Transfer dieses Operators zur IL-Ebene wurde häufig durch idiolektale Verbalisierungen sichtbar.

Zu These 1

Bezüglich der Mathematisierungen und deren Abfolge ist somit festzustellen:

- bei Aufgaben mit einfachen linearen Handlungsstrukturen (I) erfolgen Mathematisierungen gemäß den Standardisierungen;
- bei Aufgaben mit nichtlinearen Strukturen (II) erfolgt Lösen der Aufgaben in sukzessive aufeinanderfolgenden Teilschritten nach Vorgabe durch den Text.

5.3.2. Strategieanalysen

Bei den 108 Aufgabenbearbeitungen wurden bei 23% Strategie 1, 57% Strategie 2 und 9% Strategie 3 angewandt. Bei 6% der Bearbeitungen erfolgten Strategiewechsel 1 zu 2, bei 1% Strategiewech-

sel 2 zu 3, bei 4% der Bearbeitungen konnte keine Strategie ermittelt werden.
Strategie 1 wurde bei A 2 und A 9 von jeweils 5 SS, bei A 5 von 8 SS angewandt, die Bearbeitung von A 7 wurde von 6 SS, von A 9 von 4 SS, von A 5 und A 6 von jeweils 3 SS abgebrochen (vgl. Tabelle 3).

Von der Mehrzahl der Schüler wurde die von früherem Unterricht her vertrautere Methode des Rückwärts- oder Durchschnittsrechnens angewandt, lediglich bei SS H und D wurde bei 5 bzw. 4 Aufgabenbearbeitungen überdurchschnittliche Anwendung von Strategie 1 festgestellt.
Dies zeigt deutlich, daß die vier Monate zuvor eingeübten und nur sporadisch wiederholten Verfahren zur Anwendung von Strategie 1 auf Textaufgaben in weit geringerem Maße internalisiert wurden als jene zur Strategie 2. Die "strukturelle Bindung" von Strategie 2 an interne Aufgabenrepräsentationen ist durch vielfältige, in der bisherigen Schullaufbahn der Schüler erfolgte Verflechtungen, wesentlich stärker als jene an Strategie 1. Sie ist offensichtlich so stark, daß sie auch gegenüber positiven Erfahrungen mit Strategie 1 dominiert und diese in den Hintergrund, oder informationstheoretisch, in schwer zugängliche Gedächtnisspeicher verdrängt.

In diesem Kontext ist die Anwendung von Strategie 3 durch SS E und F erwähnenswert. Während die Anwendung von Strategie 3 bei S F nur einen letzten Ausweg darstellte, erfolgte sie durch S E dermaßen routiniert und schnell, daß er hierdurch Strategie-1- bzw. Strategie-2-Anwendern deutlich überlegen war und bei A 7 - 9 gute Erfolge erzielte. Bei der Anwendung anderer Strategien kam es bei diesem Schüler zu Fehllösungen, d.h., daß in seinem Falle das TaE-Verfahren als erfolgreichste Strategie zur Aufgabenrepräsentation internalisiert war.

Zur Strategieanwendung und -entwicklung ließen sich folgende Vorgehensweisen unterscheiden:

a) Die Beobachtungen zur Vorgehensweise von SS A, B, G und K legen den Schluß nahe, daß Strategieentscheidungen hier bereits vor der Informationsaufnahme getroffen wurden.

   Unmittelbar nach der Informationsaufnahme erfolgten strategiebezogene Verbalisierungen in IL oder MUS, wobei die Schüler versuchten, die gleiche Strategie auf alle Aufgaben anzuwenden. Besonders deutlich wurde dies bei S K, die nahezu krampfhaft bemüht war, alle Informationen nach Strategie 1 zu verarbeiten. Gelang dies auch nach wiederholten Versuchen nicht, wechselte sie die Strategie. Hier ist eine Strategiefixierung der Art: "Wenn Textaufgabe, dann Strategie 1 anwenden" zu vermuten.
   Während sich die mathematischen Fähigkeiten dieser Schülerin nicht nur auf Strategie 1 beschränkten und somit mangelndes Strategierepertoire als Ursache dieser Fixierung weitgehend ausscheidet, verfügten SS A, B und G weitgehend über nur eine Strategie, so daß ihre Vorgehensweise auf eine unzureichende Ausprägung der Variablen LVM zurückgeführt werden kann. Die

Strategieentscheidungen erfolgten hier deutlich löserspezifisch.

b) Strategiebezogene Verbalisierungen erfolgten bei SS D, E, F, L, M und N ebenfalls nach der Informationsaufnahme, jedoch zögernder, nicht mit der gleichen Unmittelbarkeit wie bei den unter a) beschriebenen Fällen. Hier war anzunehmen, daß der Strategieentscheidung ein Analyseprozeß voranging.

Das Strategierepertoire dieser Schüler umfaßte meist deutlich mehrere Strategien, allerdings konnte nicht zweifelsfrei geklärt werden, ob bei diesen Schülern Strategieentscheidungen überwiegend nach aufgabenspezifischen Gesichtspunkten erfolgten.
Dies gelang bei S H (weniger gut bei S C), bei der deutliche Strategieentscheidungen nach der Informationsanlyse, je nach Aufgabentyp beobachtet wurden. S H verfügte über hinreichende mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Anwendung von Strategie 1, 2 oder 3.

Die Analyseergebnisse lassen vermuten, daß die Strategieentscheidungen wesentlich von der individuellen Ausprägung der Löservariablen LVM abhängen. Besteht mathematische Kongruenz bezüglich mehrerer Strategien, erfolgt Strategieanwendung nach aufgabenspezifischen Gesichtspunkten.

Zu These 2

Somit kann zu These 2 der Studie zusammenfassend festgestellt werden:

- löserspezifische Strategieanwendung erfolgt bei unzureichendem Strategierepertoire oder bei aufgabenspezifischen Strategiefixierungen;
- aufgabenspezifische Strategieanwendung erfolgt bei mathematischen Kongruenzen bezüglich aller verwendbarer Strategien.

5.3.3. Analysen der a-Fehler

a-Fehler wurden bei den Mathematisierungen M1, M2 und M3 beobachtet, nur in einem Falle trat ein a-Fehler (S C) bei M4 auf.
Bei Aufgabe 3 und 5 ließen sich die aufgetretenen a-Fehler M2 bzw. M1 zuordnen.

Bei Aufgabe 3 traten außer bei S M bei allen Schülern a-2-Fehler bei der Informationsanalyse auf. Hier überstiegen die sprachlichen Anforderungen der Textaufgabe deutlich die sprachanalytischen Fähigkeiten der Schüler und verursachten Sachfehlkonzepte sowie das Auslassen eines Operators.

Bei Aufgabe 5 konnten a3-Fehler auf Fehlcodierungen des MUS-Textes zurückgeführt werden, allerdings wurde hier eine Differenzierung erforderlich in:

a31-Fehler, die durch Nichtinversionen der im Text vorgegebenen Relationen, d.h. durch "Direktcodierungen" der MTS-Formulierungen zur MSS-Ebene entstanden

und

a32-Fehler durch Beibehaltung des ursprünglich richtigen Decodierungsmusters beim Strategiewechsel.

Während die bei Aufgabe 5 aufgetretenen a31-Fehler "echte Nichtinversionsfehler" sind, die durch Anwendung eines fixen internen Decodierungsmusters zustande kommen und so unzureichenden sprachlichen Fähigkeiten zuzurechnen sind, werden bei a32-Fehlern ja Handlungsvorschriften (-operatoren) der ursprünglichen Strategie auf eine andere übertragen. Somit ist dieser Decodierungsperseverationsfehler streng vom Fehler durch Nichtinversion zu trennen.

Die bei Aufgabe 2 unter Anwendung von Strategie 2 aufgetretenen a31-Fehler bei SS E, M und N legen folgende Deutung am Prozeßmodell nahe:
Aus dem MTS-Text wurde unter Auslassung von M1 und M2 eine interne MUS-sprachliche Aufgabenrepräsentation entwickelt und anschließend zur MSS-Ebene transferiert, ein Verfahren, das der MUS-Text dieser Aufgabe nahelegt.
Die Fehldecodierungen (a31-Fehler) wirken sich allerdings nicht nur auf der MSS-Ebene aus, vielmehr wird hierdurch auch der durch die Aufgabe intendierte Sachkontext verändert, so daß der internen Aufgabenrepräsentation ein anderer Sachverhalt zugrunde liegt.
Bei der Revision von a31-Fehlern hat der Löser bei Nicht-MUS-Aufgaben demnach mindestens zwei Hürden zu nehmen: zum einen muß er das angewandte Decodierungsmuster, zum anderen das Sachfehlkonzept revidieren und somit die interne Aufgabenrepräsentation diesem veränderten Konzept anpassen.

a4-Fehler bei Aufgabe 6 ließen sich auf Sachfehlkonzepte zurückführen. Sie beruhten ebensowenig auf fehlerhaften semantischen Transformationen, wie die im Verfolg der Strategieentwicklung bei Aufgabe 7 (bedingt auch bei Aufgabe 9) aufgetretenen a1-, a2- und a4-Fehler, die als Folge von b2-Fehlern auftraten.

Häufungen von a-Fehlern wurden bei SS A und M festgestellt, während bei S H nur ein a-Fehler zu verzeichnen war. Bei S A wurde das Auftreten von a-Fehlern überwiegend bei der Informationsaufnahme (Decodierung), bei S M bei der Informationsanalyse verzeichnet.
Bemerkenswert sind die durch a-Fehler bei S E verursachten Fehllösungen der Aufgaben 1, 2, 3, 5 und 6. Hier war die Suche nach Decodierungsmustern Fehlerursache, während diese Schwierigkeit bei Anwendung eines TaE-Verfahrens bei den von anderen Schülern als "schwierig" eingestuften Aufgaben 7, 8 und 9 nicht auftrat.

Zu These 3

Bezüglich der Ursachen von a-Fehlern und deren Lokalisierung im Lösungsprozeß ergibt sich somit:

- unzureichende mathematische Fähigkeiten im Verfolg der jeweiligen Strategie (M3);

- Textfehldecodierungen des MTS-Textes aufgrund unzureichenden semantischen Repertoires (M1);
- Fehlanalysen des zugrunde liegenden Sachverhalts (M2).

5.4. Zusammenfassung und Ausblick

Wie vermutet, gelangen durch die Hauptstudie tiefere Einblicke in das Lösungsverhalten und die Ursachen für Fehllösungen bei Textaufgaben. Als wesentliche Ursachen stellten sich heraus:

- Schwierigkeiten durch sprachliche Inkongruenzen bei der Informationsanalyse und -verarbeitung;
- mathematische Inkongruenzen durch mangelnde Verfügbarkeit über zur Lösung erforderliche mathematische Verfahren.

Als Hauptdefizit ist jedoch das Unvermögen anzusehen, zu Aufgaben mit nichtlinearen Strukturen geeignete Lösungspläne aufzustellen und durchzuführen.

Das Untersuchungsinstrument erwies sich besonders durch die hieraus erwachsenden Vergleichsmöglichkeiten von Prozeß- und Standardisierungsdiagrammen als geeignetes Analyseinstrument.

Dennoch war es bei alleiniger Auswertung des Verfassers und ohne Gegenkontrolle durch einen zweiten Auswerter mitunter schwierig, eindeutige Zuordnungen verbaler Äußerungen zu Punkten eines Koordinatensystems vorzunehmen.
Insgesamt wird ja hierbei versucht, über die Kette: reale Situation - Tonbandaufzeichnung - Wortprotokoll - graphische Darstellung, ein Gedächtnisbild oder zumindest einen Teil hiervon, als Graphik darzustellen, eine Vergröberung, bei der Nebenbedeutungen verbaler Äußerungen verloren gehen oder eigentlich Gemeintes mitunter durch das doch grobe Raster des Untersuchungsinstruments nicht erfaßt wird.

Die Studie konnte zwar aus rein praktischen Gründen nur mit einer kleinen Gruppe von Schülern, die sich hierzu freiwillig zur Verfügung stellten, durchgeführt werden, doch erhellen die Resultate schlaglichtartig Schwierigkeiten, die in der Praxis des Mathematikunterrichts bei der Behandlung von Textaufgaben auftreten können.
So können die hier gewonnenen Ergebnisse den Blick des Praktikers bei Auswahl und Behandlung von Textaufgaben bezüglich sprachlicher, sachlicher und mathematischer Anforderungen schärfen. Die wiedergegebenen Prozeßabläufe sind dann als Beispiele zur Vielfalt und Verschiedenartigkeit interner Denkprozesse im Mathematikunterricht wertbar und können so zu tieferen Einsichten bei ähnlichen Prozessen führen sowie zum besseren Verständnis des Mathematiklehrers für die Ursachen von Schülerfehlern beitragen.
Insbesondere kann der Mathematiklehrer durch die Ergebnisse sensibilisiert werden, bei der Diagnose und Wertung von Schülerbearbeitungen nicht nur die mathematischen, sondern verstärkt

auch die sprachlichen und sachlichen Komponenten zu berücksichtigen, Defizite besser zu erkennen und zu therapieren.

Somit kann diese Fallstudie, über ihren deskriptiven Charakter hinaus, durchaus zu Änderungen des praktischen Handelns im Alltag des Mathematikunterrichts beitragen, indem ihre Ergebnisse auf analoge Aufgaben übertragen und hierdurch Veränderungen erzielt werden oder indem von der Studie Impulse für weitere Untersuchungen ausgehen.
Von besonderem Interesse wären hierbei:

- Taxonomien von derzeit in Mathematikbüchern verwendeten Textaufgaben aufgrund eines möglicherweise verfeinerten Kategorienschemas und die Erstellung diesbezüglicher Aufgabensammlungen für die Schulpraxis, sowie
- die Entwicklung von Meßinstrumenten zur Bestimmung mittlerer Kompetenzen von Lerngruppen in der Unterrichtspraxis.

Hierzu wären Untersuchungen auf breiterer Basis erforderlich, die zu allgemeineren Aussagen führen und so auch Einfluß auf die Lehrerausbildung und die Lehrerfortbildung haben könnten.

6. ANMERKUNGEN

1) Man vergleiche etwa: "Drei Abhandlungen zur Kartenprojektion" von Leonard EULER 1777, Hrsg. A. Wangerin, Leipzig 1898. Das Gesagte trifft auch auf andere Mathematiker, wie etwa die Brüder BERNOULLI zu: "Abhandlungen über Variationsrechnung" von Johann BERNOULLI (1696), Jacob BERNOULLI (1697) und EULER (1744), Hrsg. A. Stöckel, Leipzig, Berlin 1914.

2) So etwa KLEIN in KLEIN und RIECKE (1900, S.24): "In der That ist meine Absicht (um es noch einmal zu sagen), daß die Universitäten nicht etwa jetzt in ein neues Extrem verfallen und ihren Zuhörern ausschließlich eine Kenntnis der angewandten Mathematik vermitteln sollen, sondern daß das Ziel eine allseitige mathematische Durchdringung des Studierenden sein muß."

3) Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen, Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968. In: Sammlung der Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister in der Bundesrepublik Deutschland, Neuwied, 1968.

4) Bildungsplan für die bayrischen Volksschulen, Hrsg.: Bayrisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, Amtsblatt Jg. 1955, S.425-512.

   Richtlinien für die Volksschulen in Rheinland-Pfalz, Runderlaß des Ministers für Unterricht und Kultus vom 29.3.1957, Grünstadt 1957, S.31.

   Richtlinien für die Lehrpläne des 5.-9. Schuljahrs der Volksschulen des Landes Schleswig-Holstein vom 8.1.1954, Hrsg.: Der Kultusminister des Landes Schleswig-Holstein.

   Bildungsplan für die allgemeinbildenden Schulen des Landes Hessen. II Das Bildungsgut. A Das Bildungsgut der Volksschule. Amtsblatt des Hessischen Ministers für Erziehung und Volksbildung., Februar 1957.

5) "In der 8. Mädchenklasse tritt die Körperberechnung zugunsten einer Flächenberechnung zurück, die in enger Beziehung zur Handarbeit und Hauswirtschaft steht." (Richtlinien für die Volksschulen in Rheinland-Pfalz, Runderlaß des Ministers für Unterricht und Kultus vom 29.3.1957, Grünstadt 1957, S.35).

6) Vgl. etwa WINTER 1972, S.11 ff.

7) Vgl. hierzu N.BOURBAKI: Éléments des Mathématiques, Paris 1955 ff.
   BOURBAKI ist das Pseudonym eines Kreises französischer Mathematiker, deren Ziel die Gesamtdarstellung der Mathematik ist, wobei sie von einem Fundament einfacher Strukturen ausgehend

immer kompliziertere Strukturen aufbauen, die sich aber immer aus den Grundstrukturen zusammensetzen. Seit 1955 erfolgen hierzu Veröffentlichungen.

8) "Die Schwäche einer Fallstudie ist, daß jeder Fall anders liegt, ihre Stärke, daß man genau sehen lernt, worin die Unterschiede liegen." DIEDERICH/WULF 1979, S.1.

9) Vgl.: Fallstudien in der Pädagogik, BRÜGELMANN in Z.f.Päd., H.4/82, S.609-623.

10) "Es wird heute von vielen anerkannt, daß der Schüler auch lernen muß, einen nicht-mathematischen Stoff (oder nicht genügend mathematischen Stoff) zu mathematisieren, d.h. so zu ordnen, daß er eine mathematischer Verfeinerung zugängliche Struktur erhält. Gestalten im Raum als Figuren betrachten, das ist den Raum mathematisieren. Die allgemeinen Eigenschaften des Parallelogramms so anzuordnen, daß eine herauskommt, aus der die anderen folgen, um so eine formale Definition des Parallelogramms zu erhalten - das ist Mathematisieren des Begriffsfeldes des Parallelogramms. Die geometrischen Sätze so anordnen, daß man aus wenigen alle ableiten kann, das heißt Mathematisieren (in diesem Falle auch Axiomatisieren) der Geometrie. Dieses System sprachlich ordnen, das ist wieder Mathematisieren eines Stoffes, nun Formalisieren genannt." (FREUDENTHAL 1977, S.127)
Vgl. hierzu auch FREUDENTHAL 1978, S.178 f .

11) SERVAIS (1968, S.41) beschreibt diesen Prozeß so:
"Pour mathématiser, on cherche à mettre en correspondance, par un code d'interprétation non mathématique, certains êtres et relations présentées dans la situation réelle, de telle sorte, que le comportement observé dans cette derniere ait les mêmes propriétés structurelles que celles attribuées au modèle mathématique. L'appréciation d'identité structurelle est de nature pragmatique puisqu'il s'agit au demeurant, de la concordance des deux domaines étrangers l'un à l'autre. Une fois établi le code qui permet de passer de la situation empirique à un modèle mathématique supposé adéquat tout théorème, conséquence logique des données du modèle, pourra être à son tour interprété concrètement. La valeur pratique du modèle mathématique dépend de l'adéquation de ce resultat."

12) "Auf höherer Stufe wird das, was auf der niederen eine Tätigkeit war, das Ordnen mit den ihm eigenen Mitteln, Objekt der Analyse, das Operative wird Gegenstand." (FREUDENTHAL 1977, S.120)

13) GLAESER (1971, S.51) verdeutlicht dies an folgendem Beispiel:
"Considérons un morceau de bois qui flotte sur un étang! C'est là une situation qu'un homme sauvage ne perçois que syncrètement: l'emploi du langage permet une permière analyse de cette apparente complexité: odeur, couleur, solidité et état liquide, tiédeur ambiante, et fraîcheur de l'eau etc.

Dans un second stade un tri s'établit entre les attributs perçus; la couleur et l'odeur par exemple peuvent être négligées, oubliées ...
Et peu à peu nous élaborons des concepts: fluide homgène, corps solide (inodore et incolore), forme géometrique, centre de gravité, etc.
La mathématisation apparaît lorsque l'on parvient a *substituer aux choses des symboles* soumis à des relations régies des axiomes (par exemple les principes l'hydrostatique).
Finalement on est en présence d'une théorie axiomatique. Cette théorie peut être développée sans aucune référence a notre brindille et notre étang. ..."

14) Anderen Autoren entnimmt man ähnliche Darstellungen:

WITTMANN (1974, S.104 ff) unterscheidet drei Aktivitäten:

1. Auseinandersetzung mit neu aufgetauchten Problemen der Wirklichkeit oder der Mathematik und Entwicklung eines dazu geeigneten Instrumentariums;
2. Distanzierung von den Ausgangsproblemen und Analyse und Abstrahierung des Instrumentariums aus 1.;
3. Anwendung des in 2. verfeinerten Instrumentariums auf andere (vertraute oder neue) Bereiche.

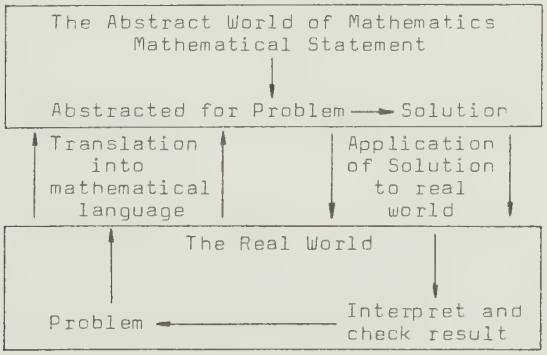
FORD/HALL (1970, S.80):

Situation ⟶ mathematische Beschreibung ⟶ Entwicklung eines mathematischen Modells ⟶ Anwendung auf die Situation ⟶ mathematische Behandlung des Modells.

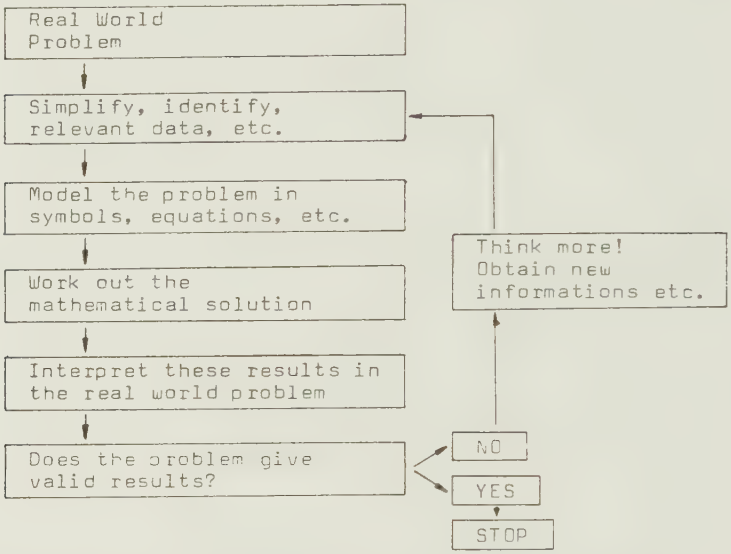
GENNART (1969, S.14):

Erfahrungen —Induktion→ Axiome —Deduktion→ Eigenschaften ⟶ Überprüfung der Erfahrungen ⟶ weitere Anwendung der Eigenschaften.

JOHNSON/RISING (1972, S.243):



Bei MIZRAH/SULLIVAN (1973, S.395) findet man folgendes Verlaufsdiagramm:



15) Enge Fassung: JOHNSON, RISING, KRYGOVSKA, SERVAIS; erweiterte Fassung: WEBER, WITTMANN, GENNART, STEINER.

FREUDENTHAL und GLAESER nehmen eine mittlere Position ein: nachdem der engere Prozeß abgeschlossen ist, beginnt der gleiche Zyklus erneut, jedoch auf höherer Stufe.

16) Weitere "Problemdefinitionen":

DUNCKER (1973, S.1): "Ein 'Problem' entsteht z.B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht "weiß", wie es dieses Ziel erreichen soll."

PIPPIG (1973, S.257) beschreibt ein Problem durch die Stücke Z_0, Z_i, Z_n: "Ein Ausgangszustand Z_0, der als psychisches Abbild einer objektiven Gegebenheit angesehen werden muß, ist über gewisse Zwischenzustände Z_i durch bestimmte Transformationen in einen Endzustand Z_n zu überführen, wobei die zwischen Z_0 und Z_n vorhandenen Relationen erst aufgefunden werden müssen."

KIRCHNER (1971, S.1): "Ein Problem bzw. eine Problemsituation besteht immer dann, wenn eine Zielvorstellung gegeben ist, deren Realisierung mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist." KIRCHNER gibt die "reduzierte Grundstruktur" eines Problems mit Ausgangszustand Z, Zielzustand Z' und Transformationsregel T an und entwickelt hieraus die Problemtypen:

1. gegeben: Z, T gesucht: T'
2. gegeben: Z, Z' gesucht: T
3. gegeben: T, Z' gesucht: Z .

Sie betont, daß sich nur einfache Aufgaben und Probleme in dieses Schema einordnen lassen und Gesetzmäßigkeiten komplexerer Aufgabenstrukturen mit den derzeitigen Mitteln der Denkpsychologie nicht analysierbar seien.

DÖRNER trennt hier scharf Problem von Aufgabe: "Aufgaben sind geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind. ... Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen aber muß etwas Neues geschaffen werden." (DÖRNER, 1979, S.10)

Nach dieser Definition ist auch die bei JÜNGST beschriebene Umstrukturierung bei der Problemanalyse und die daraus folgende konvergente Produktion von Lösungshypothesen nicht dem Problemlösen, sondern dem Aufgabenlösen zuzuordnen (vgl. Anm. 17).

KLIX (1967, S.167): "Ein Problem oder eine Problemsituation ist dadurch ausgezeichnet, daß die Versuchsperson die Situation nicht voll übersieht und die Struktureigenschaften nicht vollständig wahrnimmt."

SÜLLWOLD (1960, S.96): "Ein Problem sei dann gegeben, wenn ein Individuum ein bestimmtes Ziel erreichen will, jedoch nicht weiß, wie es zu diesem Ziel gelangen kann, also nicht auf wohlbekannte spezifische Verfahren, spezifische Techniken und Operationen zurückzugreifen vermag. Das Individuum sieht sich einem Hindernis, einer Barriere, einer Schwierigkeit gegenüber, für deren Überwindung die ihm zur Zeit verfügbaren Mittel und Maßnahmen nicht ausreichen."

SYDOW (1972, S.19 ff) entwickelt ein kybernetisches Modell für künstliche Intelligenzen: "Bei sehr vielen Problemen ist die Forderung gestellt, ein Objekt zu bestimmen, zu erzeugen oder zu identifizieren, das zu einer vorgegebenen Klasse von Objekten gehört und gegebene Forderungen erfüllen soll. Die Klasse von Objekten und die Forderungen werden dabei durch eine Menge von Daten beschrieben, die mit dem speziellen Problem variieren und durch einen vorgegebenen Variationsbereich eine Klasse von Problemen definieren. Sehen wir von den Daten zur Beschreibung der Klasse und den Forderungen ab, so ist ein Problem allgemein durch die Menge M mit Element x, ein Prädikat P und eine Bewertungsfunktion f über M definiert, wenn die Forderung gestellt wird, ein (alle) x aus M zu bestimmen, für die P gilt und f einen bestimmten Wert annimmt bzw. in einem vorgeschriebenen Bereich liegt oder Extremaleigenschaften besitzt."

17) JÜNGST (1977, S.37 ff) beschreibt diesen vierstufigen Zyklus so:

I. Problem finden, Problem erkennen:
Ein Problem besteht für ein Individuum subjektiv erst dann, wenn "eine Situation mit einer 'Schwierigkeit' bewußt wird." Hierzu gehört eine besondere "intellektuelle Sensibilität" und die Motivation, das Problem zu überwinden.

II. Problem-Analyse:
Hier werden zwei Analysearten unterschieden:
- Problemstrukturierung innerhalb des dem Individuum verfügbaren Verfahrensrepertoires,
- Umstrukturierung des Problems zu neuartigen, nicht im Verfahrensrepertoire des Individuums enthaltenen Modellen.

JÜNGST weist daraufhin, daß es hierbei sowohl von der Einstellung, wie vom verfügbaren Verfahrensrepertoire des Individuums abhängt, welcher Analysetyp zur Anwendung kommt.

III. Produktion von Lösungshypothesen durch:
- konvergente Produktion mittels "sukzessiver Umformung des Problems" und
- divergente Produktion, bei der es sich um Lösungen handelt, "die für den Problemlöser und/oder für seine Umwelt ungewöhnlich sind."

IV. Überprüfung der Lösungshypothesen als besondere Stufe dann, wenn das Individuum "in einer externen oder internen Probehandlung unter Heranziehung und Beachtung der in der Analyse geklärten Bedingungen den Wert der Hypothese prüft" und nicht, wenn die Lösung "nach einer kurzen Bewertung qua Stimmigkeit" als Output erscheint.

18) Zu weiteren Unterkategorien können hier Problemlöseprozesse, die etwa unter physikalischen, chemischen, biologischen, linguistischen, etc. Aspekten ablaufen, gezählt werden.

19) Vgl. auch BIERMANN et al (1977, S.56 ff)

20) "Beim Lösen des Problems müssen die mathematischen Zeichen auf die Begriffe, Objekte auf die Gegebenheiten der ursprünglichen Situation bezogen werden. Diesen Rückbezug des mathematischen Modells auf die ursprüngliche Situation nenne ich Decodieren bzw. Interpretieren, falls eine axiomatische Theorie vorliegt. Wird ein (mehr oder minder formalisiertes) mathematisches Modell in anderen Sachbereichen (Situationen) interpretiert, so spreche ich von Anwenden." (WEBER, 1980, S.80)

21) DÖRNER/LUTZ/MEURER (1967, S.194 ff) verweisen darauf, daß durch Verbalisierungen bei der Methode des "Lauten Denkens" nicht alle Informationsverarbeitungsprozesse erfaßbar sind, da sie nicht bewußt werden.

PHELAN (1965, S.291) berichtet über Untersuchungen zum Konzepterwerb. Nach ihm entwickeln Individuen ein der Selbstbeobachtung nicht zugängliches psychologisches Konzept, das durch die Aufforderung zum Verbalisieren zerstört wird: "In doing so, they destroy the concept that previously they had attained and used intuitively or, at least in an unverbalised state."

22) DUNCKER, 1966, S.9

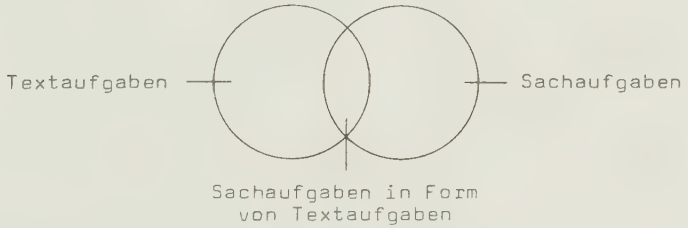
23) Vgl. hierzu RADATZ, 1980

24) CLAPARÈDE (1932) zitiert nach C.F. GRAUMANN (1971, S.109)

25) "Sicherlich richtet sich die VP im Denkversuch in ihren Verhaltensweisen auch nach den Erwartungen, die sie auf Seiten des Vl vermutet. Dieses Einstellen auf den Vl kann aber nicht den Denkprozessen zugerechnet werden, die im Zusammenhang mit dem Problemlösen ablaufen. Schließlich kommen in Denkprotokollen nur solche Inhalte vor, die einen relativ hohen Bewußtseinsgrad erfahren haben." (LÜER, 1973, S.31)

26) DAVIS/CAREY/FOXMANN/TARR, 1968, S.299 ff

27) Nach LAUTER (1978, S.656) erfolgen Darstellungen realer oder gedachter Umweltsituationen in Sachaufgaben. Diese Darstellungen können "konkret, in sprachlicher Form, in Form von Tabellen und Schaubildern, aber auch in Bildern, Filmen, Rollenspielen usw" erfolgen. Textaufgaben sind nur dann Sachaufgaben, wenn sie Umweltsituationen wiedergeben. Er verdeutlicht dies an folgender Darstellung:



28) Einige Beispiele hierzu:

MAIER (1969, S.721) unterscheidet:

"a)eingekleidete Aufgaben
Ziel: Lösen von Rechenoperationen und Anwenden von Rechenverfahren
Sinn: Erwerb rechnerischer und mathematischer Begriffe und Einsichten
Zusammenhang: Zahlen haben Vorrang, der Sachzusammenhang ist belanglos und auswechselbar

b)Textaufgaben
Ziel: Quantifizierung von Sachverhalten
Sinn: Verstehen des Zahl-Sache-Zusammenhangs
Zusammenhang: Ausgewogenes Verhältnis von Zahl und Sache

c)Sachaufgaben
Ziel: Lösen von Sachproblemen und mittelbare Informationsgewinnung
Sinn: Erwerb der Fähigkeit und dauernden Bereitschaft zur rechnerischen Daseinserhellung und Lebensbewältigung
Zusammenhang: Zusammenhang wichtig, Zahlen sind veränderlich und relativ bedeutsam.

Bei NEIGENFIND (1962, S.41) findet man eingekleidete Aufgaben, bei denen das zu lösende Problem nicht direkt genannt wird,

sondern in einer anderen mathematischen oder sachbezogenen Problemstellung verborgen ist und Anwendungsaufgaben, denen kein mathematisches Problem zugrunde liegt, zu deren Lösung jedoch mathematische Verfahren benutzt werden.

SATTLER (1969, S.733 ff) unterscheidet zwischen Einführungs-, Anwendungs- und Sachaufgaben.

29) Beispiele für Textaufgaben (aus: Mathematik für die Sekundarstufe I, BREIDENBACH et al, 1974):

"Welcher Bruch ist dreimal so groß wie der vierte Teil von 1/8 ?" (S.49)

"Ein Schutthaufen kann mit 15 Fuhren abgefahren werden, wenn jede Fuhre 1,2 m^3 faßt. Es werden jedoch 2 m^3 pro Fuhre geladen." (S.158)

"Vier Jungen sitzen im Klassenzimmer an zwei Tischen, die hintereinander stehen. Die Jungen heißen Thomas, Tim, Uwe, Werner. Ein Junge spielt gern Fußball, von den anderen spielt einer Gitarre, einer Klavier und einer Schach.
Du erhältst außerdem noch folgende Informationen: Tim sitzt neben dem Gitarrespieler, Werner sitzt neben Thomas, Uwe sitzt vor dem Klavierspieler, der Fußballspieler sitzt vor dem Schachspieler, Werner spielt kein Schach.
Was kannst Du über die Hobbys der Jungen sagen? Skizziere die Sitzordnung." (S.27)

30) Vgl. NETT (1959, S.306) zur Erfordernis der Sacherörterung vor der unterrichtlichen Lösung der Textaufgabe: "Man könnte es bezweifeln, ob es die Aufgabe der Schule ist, derartige Dinge (Sachverhalte (A.d.V.)) im Rechenunterricht zu besprechen. Wir könnten es auch dem Leben überlassen, solches Wissen zu erwerben. Wenn wir aber schon dem Unterricht die Aufgabe stellen, das Denken zu schulen, die Schüler zum Nachdenken zu veranlassen, werden wir jede Gelegenheit benützen und sogar begrüßen müssen. ...
Die Sachrechnung verlangt eine Reihe von wirtschaftlichen, sozialen und gesetzlichen Überlegungen. Es ist zweckmäßig, diese einzeln und in genügender Zahl zu bringen, zu klären und in anderem Zusammenhang zu wiederholen. Nur dann ist es wahrscheinlich, daß der Schüler derartige Aufgaben lösen und im Leben einfache wirtschaftliche Zusammenhänge verstehen und beurteilen kann."

31) Dazu eine Ausführung von KLINE (1974, S.175):
"Endlich ist die Mathematik aus der Technik nicht wegzudenken. Sollten diese Anwendungen und Werte der Mathematik im Mathematikunterricht gebracht werden? Selbstverständlich! Wissen ist ein Ganzes und Mathematik ist ein Teil desselben. Diese Disziplin entwickelte sich nicht abseits von anderen Vorgängen und Interessen. Mathematik als separates Fach zu unterrichten, ist eine Perversion, eine Korruption und Verzerrung der wahren Kenntnis. Wenn man aus praktischen Gründen gezwungen ist, den Unterricht in Mathematik, Naturwissenschaften, Geschichte

und andere Fächer aufzuteilen, sollte man zumindest erkennen, daß diese Aufteilung künstlich und falsch ist."

32) Vgl. hierzu die Kritik LENNÉ's (1969, S.24, 69, 87), DAMEROW's (1974, S.133 ff), MAIER's (1975, S.474), u.a.
Treffend erscheinen FREUDENTHAL's (1973, S.113) Ausführungen: "Viel schneller als aus der alten, hat sich aus der modernen Mathematik, die auf die Schule gebracht wurde, eine selbständige Schulmathematik entwickelt, mit einem Schwanz von Aufgaben, die denen der alten an Absurdität nichts nachgeben. Die Ursachen sind dieselben wie damals: man bringt auf die Schule eine fertige Mathematik, die der Schüler nur reproduzieren kann, und ergänzt sie, um doch den Schüler tätig sein zu lassen, durch sogenannte Anwendungen, die entweder der "Theorie" über den Kopf wachsen und schließlich alle Theorie überflüssig machen, oder einfache Substitutionen von Parametern der allgemeinen Theorie sind."

33) Der Simplex-Begriff wurde von BREIDENBACH (1963, S.200 ff) zur Strukturanalyse von Sachrechenaufgaben entwickelt und seitdem in vielen Mathematikbüchern zur Lösung von Textaufgaben vorgeschlagen. (Vgl. auch BAUERSFELD, 1965, S.124 ff)

BREIDENBACH (1976, S.180, 186) führt dazu aus:
"Aufgaben mit nur einer Operation handeln im einfachsten Falle von einem Sachverhalt, in den drei Größen derart eingehen, daß jede von ihnen durch die beiden anderen eindeutig bestimmt ist. Solche Sachverhalte bzw. die Größen eines solchen Sachverhaltes sind z.B. Einkaufspreis - Gewinn - Verkaufspreis oder Weg - Geschwindigkeit - Zeit. Sie haben ihre abstrakten Entsprechungen in den Grundrechenarten z.B. Minuend - Subtrahend - Differenz, Multiplikand - Multiplikator - Produkt. Einen Sachverhalt mit der genannten Eigenschaft wollen wir einen Simplex nennen, um ein kurzes Wort zu haben. ...
Viele Aufgaben des Lebens oder der Rechenbücher haben nicht die Form eines Simplex oder einer Reihe von Simplexen. Erst nachdem im Text ein vielgestaltiger Sachverhalt aufgeführt worden ist, erscheint (oft) eine einzige Frage. Eine Aufgabe, deren Text noch nicht in eine Reihe von Simplexen gegliedert ist, wollen wir einen Komplex nennen."

34) Charakteristisch erscheinen hierzu BREIDENBACH's (1976, S.177 f) Ausführungen: "Namentlich in den unteren und mittleren Schuljahren muß der Sachverhalt der Aufgabe dem Kinde aus seinem Erleben heraus voll und ganz vertraut sein. Eine Textaufgabe darf hier nicht Veranlassung geben, die Sache zunächst zu klären, von der die Aufgabe spricht.
Die Textaufgaben dieser Schuljahre haben nicht den Zweck, die Sachkenntnisse des Kindes zu erweitern. Vielmehr soll das Kind an den Textaufgaben lernen, die mathematische Aufgabe in ihnen zu erkennen, zu formulieren und zu lösen. Diese schwierige Aufgabe kann dem Kinde höchstens dann gelingen, wenn es die Sachverhalte der Aufgaben vollständig durchschaut; das heißt aber, wenn sie ihm im Leben oder im Unterricht der Sachfächer vielfältig begegnet sind und es mit ihnen vollständig vertraut ist.

In den Abschlußklassen, wenn das Lösen von Textaufgaben ausreichend geübt worden ist, mögen dem Kinde hie und da in den Textaufgaben Sachverhalte erstmalig entgegentreten, so daß eine sachliche Unterweisung dem Lösungsversuch vorausgehen muß. Doch muß auch in diesen Klassen der Rechenzweck die Hauptsache bleiben. Aufgaben, die eine zeitraubende Klärung des Sachverhalts nötig haben, sind zu vermeiden."

35) Die Analyse des Sachverhalts wird hierdurch zur Gedächtnisübung für den einzelnen Schüler. DUNCKER (1966, S.24) bemerkt hierzu: "Wer bloß sein Gedächtnis befragt nach einer Lösung der Aufgabe so oder so, kann für die innere Natur der vor ihm liegenden Problemsituation blind bleiben, genauso wie jemand, der, statt selber nachzudenken, einen klugen Menschen oder ein Lexikon befragt."

36) Nach LÖRCHER (1974 (b), S.75) liegt der Schwerpunkt der meisten modernen Unterrichtswerke auf der mathematisch sauberen Erarbeitung von Begriffen.
"Während auf fachlicher Seite viel Sorgfalt verwendet wird, bleibt die Frage, welche Bedeutung diese Begriffe für den Schüler zum Erfassen der eigenen Wirklichkeit und zur Erkundung, Formulierung und Lösung von darin auftretenden Problemen haben, unbeachtet."

SPETH (1973) untersuchte vor der Reform verwendete Mathematikbücher auf ihre realitätsgerechte Darstellung unserer Gesellschaft. Sie stellte fest, daß dieses Bild

- verzerrt und unwahr und zum Unverständnis für gesellschaftliche Realitäten beitrug,
- schichtenspezifische Selektionen schon in Grundschulrechenbüchern vollzogen wurden,
- weder eine Emanzipation des Arbeiters noch der Frau stattfand,
- Arbeiterkinder und Mädchen, Mittelschichtenkindern und Jungen nicht gleichberechtigt waren,
- emanzipatorische Ziele in Sachaufgaben nicht vollzogen wurden.

Vergleicht man Textaufgaben in Rechenbüchern vor und nach der Reform des Mathematikunterrichts, stellt man fest, daß viele Aufgaben aus Büchern vor der Reform in neuere Bücher unverändert übernommen wurden, so daß die Ergebnisse der SPETH'schen Untersuchung sicherlich auch auf derzeitige Textaufgaben zutreffen. Übernahmen von Textaufgaben von Lehrbuchausgabe zu Lehrbuchausgabe werden beim Vergleich jahrhundertealter Aufgaben mit modernen deutlich sichtbar - die Übereinstimmungen sind häufig eklatant (vgl. hierzu Anhang 7.2.).

MAIER (1972, S.165): "Die Textaufgabe kommt, zumindest in der gestellten Form, im Berufs- und Alltagsleben nicht vor. Sie ist eine schulische Kunstform, mit deren Hilfe die Schüler das Lösen von Sachproblemen erlernen sollen. Das ist ihr einziger, doch hinreichender Rechtfertigungsgrund."

37) STRAUSS (1973, S.454): "Die Fähigkeit, Fragen aufzuspüren und Aufgaben zu entdecken, ist für die kognitive Entwicklung des

Kindes, für den Aufbau einer kreativen Persönlichkeit, von entscheidender Bedeutung."
Dieses Verhalten wird jedoch nicht durch Einüben von Schemata erreicht. STRAUSS bezweifelt die Eignung der Simplexmethode (FN 3, S.454):
"Es muß nach den vorliegenden Erfahrungen bezweifelt werden, daß über die Simplexmethode ein Lösungsverhalten aufgebaut bzw. gefördert wird, das den Schüler befähigt, sich auch mit neuartigen, komplexen Situationen (bei gegebenen Fragen) erfolgreich auseinanderzusetzen. Ganz sicher ist es jedoch, daß der Schüler so nicht lernt, in einer komplexen Sachsituation - auch außerhalb der Schule - eine (mit mathematischen Mitteln lösbare) Frage zu erkennen und selbständig die weiteren Schritte bis zur Lösung durchzuführen, wie Sichten der vorgegebenen Informationen, Zusammentragen der bzgl. der Fragestellung notwendigen Informationen u.a. (...)."

38) Folgende Mathematikbücher wurden durchgesehen:

ATHEN/GRIESEL: Mathematik heute 8, Hannover 1974.
BREIDENBACH (Hrsg.): Mathematik 7. Schuljahr, Braunschweig 1972.
BREIDENBACH (Hrsg.): Mathematik 8. Schuljahr, Braunschweig 1972.
BREIDENBACH (Hrsg.): Mathematik für die Sekundarstufe I, Hannover 1976.
TRAEGER/UNGER/MEYER/VOGLER: Mathematisches Arbeitsbuch 7, Frankfurt/M 1975.
TRAEGER/UNGER/MEYER/VOGLER: Mathematisches Arbeitsbuch 8, Frankfurt/M 1974.
KUSCH/AITS: Mathematik Klasse 8, Essen 1975.
WINTER/ZIEGLER: Neue Mathematik 8, Hannover 1972.

39) LÖRCHER (1974 (b), S.76) unterscheidet folgende Sachbezüge bei Textaufgaben:

- Situationen des täglichen Lebens;
- Situationen aus der weiteren Umwelt: Berufswelt, soziale Probleme, Verkehrsprobleme, Umweltschutz, Themen, die den Schülern aus dem Fernsehen bekannt sind u.ä.;
- fächerübergreifende, interdisziplinäre Themen: Anwendungen in Fächern wie Physik, Chemie, Biologie, Erdkunde, Geschichte, Gemeinschaftskunde, Hauswirtschaft, Arbeitslehre, Werken, Sport;
- Abstraktionen der Realität z.B. in Denksportaufgaben;
- rein mathematische Themen.

40) Unter Analyse wird hier das Zergliedern der Problemsituation verstanden. Hierdurch soll ein Überblick über die Problemkomponenten und deren Beziehungen zueinander gewonnen werden. Durch Synthese, die Herstellung geeigneter Beziehungen zwischen den Komponenten und Auffindung hierzu notwendiger Operationen, wird das Problem gelöst.

41) LOMPSCHER/STAHL (1962, S.17):
"*Dagegen zeigte sich bei anderen, daß sie durch das Zahlenmani-*

pulieren tiefer in die Zusammenhänge der Aufgabe eindrangen, sich ihrer Fehler bewußt wurden und schließlich den Lösungsweg mehr oder weniger klar erfaßten. *Diese Schüler gingen also - unter dem Einfluß der Denkhilfen, die der Erwachsene gab - vom Raten zum sinnvollen Analysieren über. ...*
In einigen wenigen Fällen stellten wir fest, daß die Schüler (...) ein Verfahren - das geistige Experiment - anzuwenden versuchten. ...
Sie probierten also auch viel - ... - aber *dieses Probieren war mehr oder weniger sinnvoll und zielgerichtet, wurde als Mittel der Analyse verwendet,* während das Probieren in den anderen Fällen nichts anderes als blindes Raten und sinnloses Zahlenmanipulieren war."

42) SIEBERT (1965, S.3 ff) und KLEIN (1965, S.20 ff) bestätigten diese Befunde nach eigenen Untersuchungen mit den von LOMPSCHER/STAHL verwendeten Methoden und Fragestellungen.

43) Die Probanden lösten 3-7 Aufgaben in 45 Minuten und wurden angehalten, ihren Rechenweg zu erläutern. Der Untersucher stellte Rückfragen, gab "Sprechprovokationen", Denkhilfen verschiedener "Dosierungen" vom "Simmt das wirklich?" bis zum Analogiebeispiel. Die gesamte Untersuchung wurde mit dem Tonband protokolliert, schriftliche Aufzeichnungen der Probanden in die Auswertung einbezogen.

44) D.G. BOBROW: A question answering system for high school algebra word problems, Baltimore 1964 (nach PAIGE/SIMON).

45) "Practice Problem 1:
If a certain number is multiplied by 6 and the product increased by 44, the result is 68. Find the number."

46) "Problem 1:
The number of quarters a man has, is seven times the number of dimes he has. The value of the dimes exeeds the value of the quarters by two dollars and fifty cents. How many has he of each coin?"

47) "Problem 4:
A board was sowed into two pieces. One piece was two-thirds as long as the whole board and was exeeded in length by the second piece by 4 feet. How long was the board before it was cut?"

48) "There are numerous instances in which the key words in the verbal formulation can serve as *cues* which lead directly to the mathematical operation required for solution. However, there are many other instances in which the same key words might act as a *distractor*: i.e. might lead the solver to a mathematical operation (currently associated with them) which is not the one required for solution." (NESHER/TEUBAL, 1975, S.43)
"The very fact that the same words appear at times as cues

and at other times as distractors proves that there is no universal translation based on verbal cues that can ensure the attainment of the correct path to solution." (S.50)

49) Die bei SCHRODER (1967) erwähnte "Filterwirkung des Organismus" kann als Analogon dienen.

50) Unter der Leitung WERTHEIMER's führte LUCHINS 1936 Versuche zur Prüfung der Gewöhnung von Versuchspersonen an bestimmte Aufgabentypen durch. Er stellte fest:
"Einstellung und Gewöhnung verursacht eine Automatisierung der Denkvorgänge, ein blindes Vorgehen gegenüber Aufgaben, man geht an die Aufgaben nicht mit den ihr angepaßten Überlegungen heran, sondern bleibt automatenhaft an dem eingeübten Denkmuster."

51) Folgende Aufgabenvariablen wurden von ihnen untersucht:

- Komplexität (hier: Anzahl, Art und Zusammenhang der zur Lösung notwendigen Rechenoperationen);
- rechnerische Schwierigkeit;
- Art der im Aufgabentext beschriebenen Sachsituation;
- Datenfolge im Aufgabentext;
- Angaben über das Bearbeitungsziel (Vorhandensein bzw. Fehlen einer expliziten Frage im Aufgabentext);
- sprachliche Darstellung und grafische Darbietung des Aufgabentextes.

(MAIER/SCHUBERT, 1978, S.20)

52) "Es ist freilich nicht auszuschließen, daß sich bei alleiniger Berücksichtigung sehr komplexer Aufgaben (fünf oder mehr Lösungsschritte) eine statistisch gesicherte Abweichung im Bearbeitungserfolg hätte nachweisen lassen."
(MAIER/SCHUBERT, 1978, S.43)

53) Gute sprachliche Gestaltung wird erreicht durch: einfache Sätze, konkrete Beschreibungen, kindgerechte Ausdrücke, mittlere Prägnanz. (MAIER/SCHUBERT, 1978, S.50 f)

54) Vgl. hierzu etwa RADATZ, 1976.

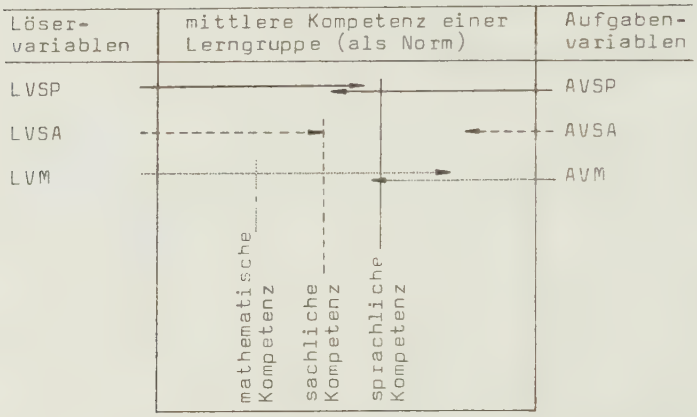
55) Natürlich werden Lösungsprozesse von einer Vielzahl weiterer externer oder interner Faktoren beeinflußt, etwa von Interaktionsprozessen bei Gruppenbearbeitungen von Textaufgaben, von der Motivationslage der Löser, etc. Solche Faktoren werden bei der weiteren Erörterung des Lösungsprozesses insbesondere auch wegen der Vielzahl hier außerdem zu berücksichtigender und schwer zu kontrollierender Variablen ausgeschlossen.

56) Durch die Einführung dieser Bezugsnormen wird es möglich,

a) individuelle Abweichungen der Löser- oder Aufgabenvariablen zu messen,

b) Abweichungen anderer Lerngruppen von dieser Norm festzustellen und so zu allgemeineren Aussagen zu gelangen.

57) Beispiel zur Wirkung von Aufgaben- und Löservariablen beim Lösen einer Textaufgabe.



LVSP - AVSP: Sprachliche Kongruenz, die Variablen stimmen überein. Die Sprachkompetenz des Lösers ist geringer als die der Lerngruppe, übersteigt jedoch die sprachlichen Anforderungen durch die Aufgabe.

LVSA - AVSA: Sachliche Inkongruenz, der Sachbezug der Aufgabe übersteigt die Sachkenntnisse des Lösers und die der Lerngruppe.

LVM - AVM : Mathematische Kongruenz. Die mathematische Kompetenz des Lösers übertrifft die der Lerngruppe sowie die mathematischen Aufgabenanforderungen.

Da sachliche Inkongruenz vorliegt, ist die Textaufgabe nicht lösbar.

58) Z.B. Menge, Raum, Abbildung, eindeutig, gleich, etc.

59) MAIER/BAUER (1979, S.137 ff) unterscheiden Allgemeinsprache und Fachsprache. Die Fachsprache unterscheidet sich von der Allgemeinsprache durch

1. syntaktische Kriterien:
   a) größere Anzahl fachlicher Zeichen und Termini,
   b) höherer Formalisierungsgrad durch Absehen jeder Bedeutung der gebrauchten Zeichen und ausschließliche Betrachtung ihrer grafischen Form;
2. semantische Kriterien:
   a) Eindeutigkeit bei der Begriffsbildung durch Zuordnung nur eines Begriffes zu einem Zeichen,
   b) Eindeutigkeit bei der Formulierung von Sätzen (eindeutige Zuordnung eines Satzes zu einem bestimmten Sachverhalt),

c) Eindeutigkeit bei Instruktionen,
d) Konsequenz bei der Befolgung von Zuordnungen,
e) Konsistenz der Begriffe durch nicht beliebige Kombinierbarkeit;

3. pragmatisch-kommunikative Kriterien:
Die Fachsprache dient dem Austausch mathematischer Gedanken und Informationen.

60) Dazu SEARLE (1977, S.25): "Es ist möglich (stellt keinen Widerspruch dar), daß andere Leute, die meiner Meinung nach den gleichen Dialekt wie ich sprechen, andere Regeln internalisiert haben, daß folglich meine linguistischen Charakterisierungen mit ihren nicht übereinstimmen."

61) WINTER (1979, S.5 ff) hebt "drei in vielfältiger Weise miteinander verschränkte Funktionen" der Sprache im Mathematikunterricht hervor:

"- Sie dient der Kommunikation in der Unterrichtsgemeinschaft. ...
- Sie ist ... Trägerin mathematischer Bedeutungen. ...
- Schließlich ist gewisses Symbolmaterial selbst Lehrstoff."

Seiner Ansicht nach ergeben sich Kommunikationsprobleme

- durch den Gebrauch theoretischer Begriffe,
- durch den Präzisierungsdruck bei der Formulierung mathematischer Aussagen,
- durch die "methodische Unterrichtssprache", die im Unterricht bei Verständnis- oder Verständigungsschwierigkeiten verwandt wird
- und durch die Art des Lehrens und Lernens.

Umgangssprache sieht WINTER insofern als Trägerin mathematischer Fachsprache an, als aus ihr durch Normierungen theoretische Begriffe ableitbar sind, was jedoch die "Kenntnis relevanter Beobachtungssituationen" erfordert.

GRIESEL (1979, S.160 ff) klassifiziert in Curricula und im Mathematikunterricht verwendete Termini:

1. Fachtermini, bei denen zu unterscheiden sind:
a) objektsprachliche Ausdrücke, die Objekte der Mathematik bezeichnen oder symbolisch vorgegeben sind
und
b) metasprachliche Ausdrücke, mit denen über objektsprachliche Termini gesprochen wird;

2. Arbeitsausdrücke, die der unterrichtlichen Kommunikation dienen und unmittelbar verständlich sind;

3. fachdidaktische Termini, Fachausdrücke, die der Kommunikation der Mathematikdidaktiker dienen und nicht in den Unterricht gehören.

VOLLRATH (1979, S.57 ff) unterscheidet im Mathematikunterricht fach- und umgangssprachliche Begriffsbezeichnungen (wobei er allerdings nur die im Unterricht gebrauchten Fachtermini erläutert):

1. von der Umgangssprache assimilierte Begriffe (Summe, Quadrat, Kreis, ...);
2. aus der Umgangssprache verstehbare Fachtermini: "... So sind Begriffe wie Viereck, Teiler, fünfstellige Zahl, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, gleichseitiges Dreieck, unmittelbar aus dem Kontext verständlich.";
3. an umgangssprachliche Begriffe angelehnte Fachtermini (ähnlich, stetig, Schneckenkurve, ...);
4. aus der Umgangssprache entlehnte Termini mit anderer Bedeutung (Gruppe, Ableitung, Körper, ...); (VOLLRATH verweist darauf, daß "Lernschwierigkeiten entstehen, wenn die Schüler andere Vorstellungen haben und meinen, sie könnten sie zum Verständnis aktivieren, ohne zu sehen, wie das möglich ist.")
5. Kunstwörter in der Fachsprache (Ringoid), wobei er die Ansicht vertritt: "Der wichtigste Nachteil dieser Bezeichnungen ist darin zusehen, daß es dem Schüler schwerfällt, diese Wörter auszusprechen und zu merken."

LÖRCHER (1974 (a), S.1 ff) verurteilt die unnötige Zunahme "mathematischer Begriffe", die die Schüler nicht aus der Umgangssprache verstehen, oder die umgangssprachlich eine andere Bedeutung haben.
"In einem durchschnittlichen Mathematikbuch werden dem Schüler ... rund 500 mathematische Begriffe vorgesetzt. Insgesamt handelt es sich um Größenordnungen, die Mathematik in die Nähe einer Fremdsprache rücken."
Den Grund für die "massenweise Verwendung mathematischer Begriffe" sieht er in der mangelnden Selbstbeschränkung der Schulbuchautoren bei der Neuschaffung und Verwendung von Fachbegriffen:
"So werden oft ad hoc Begriffe neu gebildet oder Fachtermini direkt übernommen, die dann jedoch kaum weiter verwendet werden wie z.B.: Drehspur, Ergänzungsbogen, Formvariable, Innenmaß, ..."
Weiter nennt er Begriffe, die durch Zusammensetzungen entstehen (flächengleich, wertgleich, längengleich, quotientengleich, ...). Solche Begriffe sind seiner Ansicht nach vermeidbar, stellen sie doch häufig Schülern unzumutbare Präzisierungen und Verfeinerungen mathematischer Begriffe dar.

JÄGER (1971, S.162 ff) warnt vor einseitiger Betonung der Hochsprache im Schulunterricht, die seiner Ansicht nach eher eine Behinderung in der Entfaltung und Entwicklung der Schüler darstellt. Er betont:
"Es gibt kein sprachliches Richtig oder Falsch, sondern sprachliche Äußerungen, die einer bestimmten sprachlichen Norm, also dem was von einer bestimmten Gruppe kollektiv sprachlich realisiert wird, entweder entsprechen oder nicht entsprechen, dafür aber einer a n d e r e n sprachlichen Norm entsprechen können."

62) KARASCHEWSKI (1970, S.290 ff) hebt die Bedeutung der Sprache bei Begriffsbildungsprozessen hervor und wendet sich gegen die zu frühe Benutzung von Fachtermini:
"Ein einfühlendes Verständnis für das Lösen von Textaufgaben kann daher später nicht erwartet werden, denn die Textaufgaben arbeiten ja keinesfalls nur mit einseitig erlernten Fachausdrücken. Vielmehr erfordern sie die *Übersetzung* von gewöhnlicher Sprache in die Sprache der Arithmetik."

63) "Mathematische Texte setzen sich aus diesen Elementen (fachspezifische Symbole, Bezeichnungen, Begriffe (A.d.V)) nach bestimmten Regeln und Konventionen zusammen, wobei auch die syntaktische Struktur oftmals von der natürlichen Sprache abweicht. Aus diesen Gründen ist es nur verständlich, daß für sehr viele Schüler das Verständnis von Beschreibungen der Aufgabenbedingungen, von Beschreibungen in Beweisen, Sätzen und Formeln sowie die 'erläuternden' Lehrtexte in Lehrbüchern große Schwierigkeiten überwinden muß. Unverständnis und Mißverständnisse führen zu Fehlleistungen, obwohl die vorauszusetzenden Fertigkeiten und mathematischen Fähigkeiten vorhanden sind." (RADATZ, 1980, S.40)

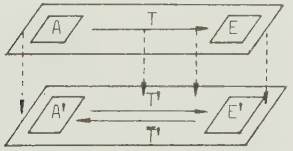
64) NESHER (1976, S.370) weist darauf hin, daß sprachliche Beherrschung von Wörtern noch nicht bedeutet, daß der Löser sie auch in mathematischen Kontexten richtig anwenden kann.

Ähnlich stellt SKOWRONEK (1970, S.76) fest, daß Schüler zwar über geeignete sprachliche Mittel verfügen, sie jedoch nicht beim Problemlösen einsetzen.

VIETH (1978, S.23 ff) unterscheidet hier zwischen aktivem und passivem Wortschatz, nur der aktive wird verwendet.

65) Nicht berücksichtigt wurde bei diesen Überlegungen, daß bei vermehrtem Aufgabenlösen Lerneffekte auftreten. Sie beeinflussen dann die Löservariablen und sind als zusätzliche Variablen zu berücksichtigen.
Da das Hauptinteresse dieser Studie den Mathematisierungsprozessen beim Lösen von Textaufgaben und den hierzu erforderlichen Mathematisierungen gilt, wurde dieser Gedankengang nicht weiter verfolgt.

66) PIPPIG (1977, S.38) beschreibt den Transfer von der natürlichen Sprache zur mathematischen Sprache als Zuordnung zweier semantischer Netze, wobei das in der natürlichen Sprache dargestellte Netz auf ein Netz in der Sprache der Mathematik abgebildet wird. Er erläutert dies an folgender Darstellung (S.38):



natürliche Sprache

mathematische Sprache

Es bedeuten:

A, A' Ausgangszustand
E, E' Endzustand
T, T' Transformationen
T, $\overline{T}$ inverse Transformationen

Die sprachliche Analyse erklärt er wie folgt:

Umgangssprache reduziert auf	Mathematische Abbildung durch
größer als ... kleiner als ...	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
... um ... ...-mal, -fach, Teil,-tel,...	Addition, Subtraktion Multiplikation, Division
von A nach E von E nach A	Operation analog zu Umgangssprache Umkehroperation

NESHER/TEUBAL (1975, S.41 ff) unterscheiden die Ebenen:

"Level (a) the verbal formulation
Level (b) the underlying mathematical relations
Level (c) the symbolic mathematical expression."

und führen dazu aus: "Since the various usages of words in natural language sentences is beyond anybody's control it becomes apparent that making the translation from Level (a) to Level (c) based on verbal interpretation would not be a sound direction to follow.
This direction is based on the misconception that there exist certain words which can serve as verbal cues without failing. This misconception has resulted in an artificial mode of presentation of word-problems which makes use of a specific and limited vocabulary, which is considered to be 'verbal cues' to mathematical operations." (S.43)

67) DÖRNER (1979, S.55) verweist auf die Adressenfunktion der Sprache und die akustische Codierung visuell dargebotener Buchstaben im Kurzzeitgedächtnis.

ELIAS/PERFETTI (1973, S.151 ff) vermuten solche Codierungen allerdings auch im Langzeitgedächtnis als Speicher semantischer Informationen. Sie beobachteten falsche Assoziationen häufiger bei akustischen als bei semantischen Decodierungen.

68) HÖRMANN (1977) versteht Information als das vom Informationsträger unabhängige Gemeinsame der Kommunikationspartner. Informationsvermittlung ist dann erfolgreich, wenn Informationsgeber und -empfänger über gleiche Codierungsregeln (Zeichenrepertoire und dessen Anwendungsregeln, Wissen um Auftretenshäufigkeiten, usw.) verfügen.

69) Hierbei ist natürlich wieder die Wirkung bestimmter Schlüsselwörter bedeutsam. Neben den schon früher erwähnten Befunden

von NESHER et al, heben BELLACK/SMITH/KLIEBARD/HYMANN (1974, S.99) hervor, daß der Analyseprozeß durch Schlüsselwörter und die mit ihnen verbundene Tendenz bestimmte Termini hervorzuheben und hiermit Assoziationen zu bilden, beeinflußt werden kann. Man vergleiche hierzu auch die Ausführungen bei DUNCKER (1966, S.102 ff) zur "funktionalen Gebundenheit".

70) PETERS (1974, S.409 ff) bezeichnet diese interne Darstellung des Problems als Codierung der im Objektbereich gegebenen Darstellungsweise.

71) Vgl. hierzu auch E. und M. DREHER (1976, S.166 ff), sowie KÖBES (1975, S.16 ff) und PIPPIG (1977, S.26 ff).

72) DÖRNER (1979, S.34) nennt dies "Leerstellen" oder "offene Stellen" des Gedächtnisbildes.

73) "Ob etwas von jemandem als ein einheitliches Gebilde angesehen wird oder nicht, hängt davon ab, ob das Individuum über das Gedächtnisbild der entsprechenden Komplexion verfügt." (DÖRNER, 1979, S.33)

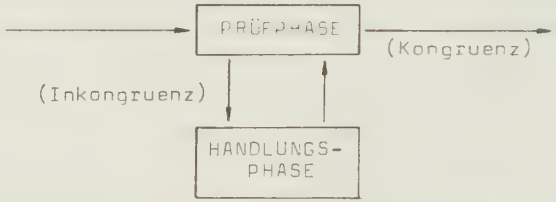
74) DÖRNER (1979, S.34) gebraucht statt des hier verwendeten Begriffes Strategie den Begriff "Handlungsprogramm". Handlungsprogramme sind im "Operatorgedächtnis" gespeichert.

Nach MILLER/GALANTER/PRIBRAM(1973, S.25) steuert ein "Plan" "... die vorgeschriebene Reihe von Handlungen so ..., daß sie in der richtigen Reihenfolge ausgeführt werden."
Pläne sind nach ihrer Auffassung durch Computerprogramme ersetzbar.

75) Es ist möglich, daß selbst bei komplexeren Aufgaben durch die Komposition ihrer Elemente die Strategie bereits bei der Informationsaufnahme feststeht. Es handelt sich hierbei meist um durch ähnliche Aufgaben induzierte Vorstellungen, "Task-induced-sets" (SÜLLWOLD, 1960, S.104), "Einfälle, die wie von selbst aufsteigen" (JÜNGST, 1977, S.42).
"Plötzliche Einfälle"(DÖRNER, 1979, S.91) unterscheiden sich hiervon durch eine Inkubationszeit, die seit der letzten Beschäftigung mit dem Problem und dem plötzlichen Einfall vergangen ist. HINKFUSS (1977, S.89) spricht hierbei von einer "Illuminationsphase" und führt als Beleg den Bericht V.d.WAERDEN's (1968) über POINCARÉ an. (Vgl. hierzu auch V.d. WAERDEN, (1968, S.2, 27)

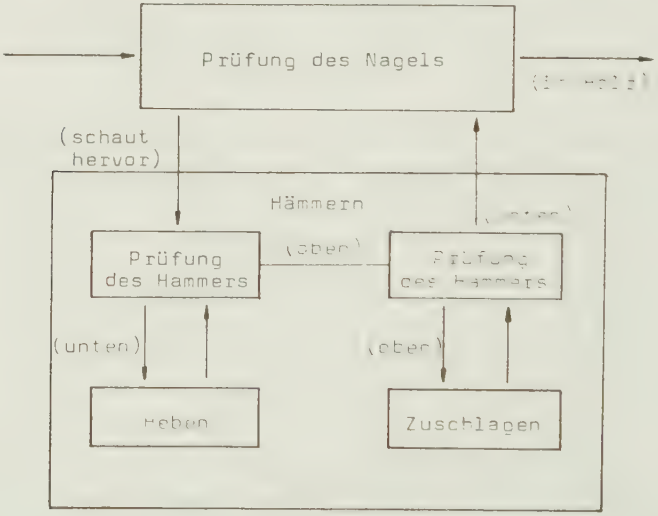
76) Die entwickelte Lösungsstrategie wird nicht immer beibehalten. Im Verlauf des Lösungsprozesses können sich Situationsteile zu neuen Ganzheiten zusammenschließen und zu neuem Verstehen führen (DUNCKER, 1966, S.35). Es ist ein *Aha-Erlebnis*, das durch "Konfusionen im Lösungsprozeß" (SÜLLWOLD, 1960, S.101), durch fehlerhafte subjektive Problemrepräsentation bedingt sein kann (LUER, 1973, S.26). Ihm geht eine Neubewertung der Informationen, eine Umstrukturierung des Problemfeldes und eine Wiederaufnahme der Strategieentwicklung voraus.

77) MILLER/GALANTER/PRIBRAM (1973, S.34) ersetzen das Reflexbogenmodell durch das "TOTE"-Modell, da das Reflexbogenmodell zur Erklärung physiologischer Vorgänge nicht hinreicht. Eingangsenergien werden mit bestimmten, im Organismus vorhandenen Kriterien verglichen (Test). Verläuft dieser Test negativ (Inkongruenz), erfolgt eine Reaktion, die anhält, bis Übereinstimmung (Kongruenz) hergestellt ist.



Test-Operation-Test-Exit-Einheit (TOTE-Einheit)

Die hier verwendete Darstellung mit Sub-TOTE-Einheiten nennen MILLER/GALANTER/PRIBRAM "TOTE-Hierarchien". Sie verdeutlichen eine solche Hierarchie am Beispiel des Einschlagens eines Nagels:
Hierarchischer Plan des Nageleinschlagens (S.41 f):



Die Geschehenisse laufen in folgender Reihenfolge ab: "Prüfe den Nagel! (Kopf schaut hervor.) Prüfe den Hammer! (Der Hammer ist unten.) Hebe den Hammer! Prüfe den Hammer! (Der Hammer ist oben.) Schlage zu! Prüfe den Hammer! (Der Hammer ist

unten.) Prüfe den Nagel! (Kopf schaut hervor.) Prüfe den Hammer! ... Das geht so weiter, bis die Prüfung ergibt, daß der Nagelkopf mit der Holzfläche eben ist, worauf die Steuerung weiter transferiert werden kann. Die zusammengesetzte TOTE-Einheit entpuppt sich ganz einfach als eine koordinierte Folge von Prüfungen und Handlungen, obwohl die dahinterliegende Struktur, die das Verhalten organisiert und koordiniert, in sich selber hierarchisch und nicht sequentiell ist." (S.41)

79) DÖRNER (1979, S.41 ff) bezeichnet diese Art der Untergliederung in Sub-TOTE-Einheiten als "Kaskadenschaltung". (Vgl. hierzu auch BIRKHAHN, 1979, S.499 ff)

79) Nach MILLER/GALANTER/PRIBRAM wird die Durchführung eines (Lösungs-) Plans durch einen internen Stop-Befehl unterbrochen bzw. aufgegeben:
"Eine reiche Quelle von individuellen Unterschieden haben wir dann vor uns, wenn wir beobachten, an welcher Stelle ihres Planes die Menschen Stop-Befehle eingebaut haben und welcher Art diese sind. ... Der eine gibt auf, weil die Zeit abgelaufen ist, der andere, weil ihm niemand zustimmt, und der dritte, weil er vermeiden will, sich selbst zu schaden usw." (S.119)

80) Weitere löserinterne Assoziationen sind etwa möglich zu:
- Erfahrungen mit Taschengeld (Taschengeldgeber, Erfolgs-, Mißerfolgserlebnisse beim Umgang mit Taschengeld, etc.),
- Erfahrungen im Zusammenhang mit den verwendeten Namen,
- Erfahrungen mit Mädchen, etc. .

Diese Aspekte, Facetten des internen Bildes, werden hier nicht weiter analysiert.

81. Trial-and-Error-Verfahren werden von DÖRNER (1979, S.72 ff) als primitivste Heurismen für das Problemlösen überhaupt, nicht jedoch als dessen schlechteste Form bezeichnet. Durch systematisches Anwenden können häufig Auswege aus schwierigen Situationen gefunden werden.
"So entdeckte Paul Ehrlich das Salvarsan, das Heilmittel gegen die Syphilis durch einen Forschungsprozeß, in dem methodisches Probieren eine hervorragende Stellung einnahm. Ähnlich gilt dies für die Glühbirne von Edison, von dem das bezeichnende Wort stammt, daß Erfindungsgabe nicht eine Sache der Inspiration, sondern eine der Transpiration sei. Albert Einstein hielt das kombinatorische Spiel der Gedanken für das wesentliche Merkmal produktiven Denkens..." (S.74)

7. ANHANG

Inhaltsverzeichnis des Anhangs

7.1.	Verzeichnis häufig verwendeter Abkürzungen	127
7.2.	Textaufgaben aus Rechenbüchern von 1808 bis 1975	128
7.3.	Anhang zur Erkundungsstudie	134
7.3.1.	Schülerdaten	134
7.3.2.	Handlungsstrukturen der in der Erkundungsstudie verwendeten Textaufgaben	135
7.3.3.	Standardisierungen der Textaufgaben der Erkundungsstudie	136
7.3.4.	Strategien und Strategievarianten in den schriftlichen Schüleraufzeichnungen zur Erkundungsstudie	141
7.4.	Anhang zur Hauptstudie	144
7.4.1.	Prozeßprotokolle zur Hauptstudie	144
7.4.2.	Standardisierungs- und Prozeßdiagramme zur Hauptstudie	151

7.1. Verzeichnis häufig verwendeter Abkürzungen (Klammervermerke: Textverweise)

AVSP	Aufgabenvariable sprachliche Anforderungen (S.32)
AVSA	Aufgabenvariable Sachbezug (S.33)
AVM	Aufgabenvariable mathematische Anforderungen (S.34)
IL	Löseridiolekt (S.31)
LVSP	Löservariable sprachliche Kenntnisse (S.32)
LVSA	Löservariable Sachkenntnis (S.33)
LVM	Löservariable mathematische Kenntnisse (S.35)
MSS	Mathematische Symbolsprache (S.31)
MTS	Mathematische Textsprache (S.32)
MUS	Mathematische Unterrichtssprache S.31 f)
TaE	Trial-and-Error-Strategie (S.48)

AO	Additionsoperator	AO^{-1}	inverser AO
SO	Subtraktionsoperator	SO^{-1}	inverser SO
MO	Multiplikationsoperator	MO^{-1}	inverser MO
DO	Divisionsoperator	DO^{-1}	inverser DO

O Handlungsoperatoren (S.45)
V Handlungsvorschriften (S.45)
AV Additionsvorschrift
GV Gleichsetzungsvorschrift

TR Textrelation (S.33)

M1
:
M9 Mathematisierungen im Prozeßverlauf (S.37)

Zo
:
ZE Anfangs-, Zwischen-, Endzustände

7.2. Textaufgaben aus Rechenbüchern von 1808 bis 1975

Die folgende Auswahl von Textaufgaben aus Rechenbüchern von 1808 bis 1975 verdeutlicht die Gleichförmigkeit der Inhalte und der Konstruktionen dieses Aufgabentyps während der vergangenen 167 Jahre.

GUNZ (1808)

Aufgabe. Ein junger Mensch wurde gefragt wie alt er sey; dieser gab zur Antwort: wenn ich noch einmal, $^1/_2$ mal, und $^1/_3$ mal so alt wäre als ich bin, und 2 Jahre mehr, so wäre ich gerade so viel über 47, als ich jetzt unter 47 Jahre alt bin. Frage wie alt er war. (S.53)

Aufgabe. Wenn zu irgend einer Bedeckung von $^9/_4$ breitem Zeuge 5 Ellen gebraucht werden, wie viele Ellen würde man von $^{11}/_4$ breitem Zeuge brauchen? (S.310)

Aufgabe. Wenn 7 Pferde auf 8 Tage 10 Metzen Hafer brauchen, wie viele Metzen werden 10 Pferde auf 28 Tage nöthig haben? (S.319)

HIRSCH (1816)

1) Zwei Capitalisten berechnen ihr Vermögen; es ergiebt sich, daß der eine doppelt so reich als der andere ist, und daß sie zusammen 38700 Thlr. besitzen. Wie reich ist nun jeder?

2) Eine Festung hat eine Garnison von 2600 Mann; darunter sind 9 mal so viel Infantristen und 3 mal so viel Artilleristen als Cavalleristen. Wie viel Leute von jedem Corps befinden sich nun darin?

34) Eine Gesellschaft von 90 Personen besteht aus Männern, Weibern und Kindern; der Männer sind 4 mehr als der Weiber, der Kinder 10 mehr als der Erwachsenen. Wie viele Männer, Weiber und Kinder befinden sich nun darunter?

37) Eine gewisse Summe soll unter drei Personen A, B, C, wie folgt, getheilt werden; A soll 3000 Thlr. weniger als die Hälfte, B 1000 Thlr. weniger als den dritten Theil, C aber 800 Thlr. über den vierten Theil dieser Summe erhalten. Wie groß ist die zu vertheilende Summe? Und wie viel bekommt jeder?

52) Ein Rechenmeister verlangt von seinen Schülern, daß sie eine Zahl, welche er im Sinn habe, aus folgenden Angaben berechnen sollen. Wenn ihr diese Zahl, sagt er, mit 5 multiplicirt, von dem Produkte 24 abziehet, den Rest durch 6 dividirt, und zum Quotienten 13 addirt, so erhaltet ihr diese Zahl selbst; welche Zahl ist es nun?

73) Aus zwei Öffnungen eines Behälters, von verschiedener Größe, strömt das Wasser mit einer ungleichen Geschwindigkeit heraus. Man weiß, daß die Öffnungen sich wie 5 zu 13, die Geschwindigkeiten der Wasserströme aber wie 8 zu 7 verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Öffnung, in einem gewissen Zeitraume, 561 Cubikfuß Wasser mehr floß als aus der anderen. Wie viel Wasser gab nun jede Öffnung in diesem Zeitraume?

75) Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben. Der erste hatte schon 36 Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfängt, und macht in eben der Zeit 8 Würfe, worin der zweite dagegen 7 macht; hingegen braucht der zweite zu 3 Würfen so viel Pulver als der erste zu 4. Wie viel Würfe wird der zweite machen müssen, bis er so viel Pulver verbraucht hat als der erste?

93) Einer meiner Bekannten ist jetzt 30, sein älterer Bruder 20 Jahre alt und folglich 3:2 das Verhältniß seines Alters zu dem seines Bruders: nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß nur 5:4 seyn?

94) Vor wie vielen Jahren hingegen war er 6 mal so alt als sein Bruder?

111) Wie alt sind wir? fragte jemand seinen Vater? Vor 6 Jahren, antwortete dieser, war ich um das Drittel mehr als dreimal so alt wie du; nach drei Jahren hingegen werde ich so alt seyn, daß ich dein Alter mit $2\frac{1}{6}$ multipliciren müßte, wenn es dem meinigen gleich werden sollte. Wie alt ist jeder?

LAUTESCHLÄGER (1834)

330) Ein Brückengelderheber nahm in einer Stunde von 7 Reitern, 4 einspännigen und 3 zweispännigen Wagen 1 fl. 16 kr. Brückengeld ein. Da nach dem Tarif von 1 Reiter das Doppelte, von einem einspännigen Wagen das Dreifache und einem zweispännigen das Vierfache dessen, was ein Fußgänger bezahlt, entrichtet wird, so fragt es sich, wie viel muß ein Fußgänger bezahlen?

467) Einem Courier, der vor 6 Tagen abgereist war und täglich 12 Meilen zurücklegt, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich 15 Meilen zurücklegt. In wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

368) Ein Vater verteilte unter seine 4 Söhne eine gewisse Summe. Der dritte bekam 9 Groschen mehr als der jüngste; der zweite 12 Groschen mehr als der dritte; der älteste 18 Groschen mehr als der zweite; und die ganze Summe betrug 6 Groschen mehr als 7 mal das, was der jüngste erhielt. Wie viel erhielt jeder?

469) Ein Soldat eilte seinem Regimente, welches auf dem Marsche von Prag über Wien nach Venedig begriffen war, nach. Da das Regiment täglich 4 Postmeilen zurücklegte und schon vor 11 Tagen aufgebrochen war, so machte der Soldat 6 Meilen und traf daher mit dem Regimente zugleich in Venedig ein. Wie weit ist es von Prag über Wien nach Venedig?

493) Ein Wasserbehälter wird durch die erste Röhre in 12 Stunden angefüllt, durch die zweite in $10\frac{1}{2}$, durch die dritte in $9\frac{3}{4}$. In welcher Zeit wird er angefüllt werden, wenn sie zu gleicher Zeit geöffnet werden?

579) Polykrates, der Tyrann von Samos, fragte den Pythagoras nach der Zahl seiner Schüler. Dieser antwortete ihm: die Hälfte derselben studirt Mathematik, der vierte Theil beschäftigt sich mit Naturkunde, der siebente Theil hört meinen Vorträgen still zu, und dann habe ich noch 3 Schülerinnen, worunter Theano die ausgezeichnetste ist.

591) Der König Hiero von Syrakus hatte sich eine goldene Krone machen lassen und kam auf den Verdacht, daß ihm der Goldarbeiter dabei einen Theil Gold entwendet und dagegen eben so viel Silber dem Gold zugesetzt habe. Archimedes soll durch Abwägen der Krone im Wasser den Betrug entdeckt und das Verhältniß des Goldes zum Silber in der Krone angegeben haben. Wenn nun dieselbe 20℔ schwer gewesen ist und beim Abwägen im Wasser $1\frac{1}{4}$℔ verloren hätte, und wenn 19,64℔ Gold im Wasser 1℔ und 10,5℔ Silber im Wasser ebenfalls 1℔ verlieren, wie viel Gold und wie viel Silber enthielt daher die Krone?

652) Ein Seeräuber erblickte einen Kauffahrer 7 Meilen von sich entfernt. Er verfolgte ihn 20 Meilen weit, als er bemerkte, daß dieser seinen Weg änderte und in senkrechter Richtung zu seiner bisherigen weiter steuerte. Der Seeräuber änderte sogleich seinen Lauf, um jenen einzuholen.
Er wußte, daß er in der Stunde 10 Knoten, der Kauffahrer aber nur 8 Knoten in der Stunde zurücklegte. Wie viel Meilen mußte im Ganzen der Seeräuber zurücklegen, bis er das andere Schiff einholte?

657) Ein Truppencorps marschirte in einer regelmäßigen Colonne mit 5 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte; bei der Annäherung des Feindes wurde die Fronte um 845 vermehrt, so daß das Corps jetzt 5 Mann hoch marschirte. Wie stark war das Corps?

NIEPOTH's Rechenbuch (1886)

44) Drei Kutscher fahren von verschiedenen Orten jeder mehrere Personen nach einem bestimmten Platze, nämlich: A 5 Personen 5 Stunden weit, B 4 Personen 4 Stunden und C 5 Personen 6 Stunden weit. An Ort und Stelle bezahlt die Gesellschaft zusammen 28,40 ℳ. Wie viel erhielt jeder Kutscher nach der Zahl der Personen und der Entfernung? (S.70)

7) Ein Bettler, der einiges Geld besaß, erhielt eines Tages 5 mal 10 Pf als Almosen und hielt zwei Mahlzeiten, deren jede ihn 40 Pf kostete. Damit war sein Geldvorrath aufgezehrt. Wie viel hatte er zuerst besessen? (30) (S.128)

18) Ein Bedienter hatte seinem Herrn 5 Jahre lang gedient; in den ersten 3 Jahren gab er jährlich 80 Mk. von seinem Lohne aus, im 4ten Jahre 90, im 5ten Jahre 100 Mk. Er hatte dabei 570 Mk. gespart. Wie viel Lohn bekam er jährlich? (200) (S.129)

39) Ein junger Mann spottete im Vorrübergehn eines Schäfers, indem er ihn fragte: „Wo willst du hin mit deinen 100 Schafen?" Der Schäfer erwiederte: „Es sind lange nicht 100; wenn ich aber noch mal soviel, das Viertel und dich dazu hätte, so hätte ich gerade 100 Schafe." Wie viel Schafe hatte der Schäfer? (44) (S.130)

63) Ein Bote geht Morgens 6 Uhr von A. ab und macht in der Stunde 3 Kilometer, um nach dem 30 Km entfernten B. zu gelangen. Um 9 Uhr geht ein anderer Bote von B. nach A. ab, der stündlich 4 Km macht. Wann begegnen sich beide? (Mittags 12 Uhr) (S.132)

65) Ein Windhund und ein Hase sind 60m weit von einander entfernt. Als letzterer zu laufen beginnt, setzt ihm der Windhund nach. Der Hase legt in der Sekunde 5m, der Hund 6m zurück. Wann holt der Hund den Hasen ein? (60) (S.132)

HESSISCHER VOLKSSCHULLEHRERVEREIN (1898)

35) Ein Schulkind braucht täglich 510 ℓ Sauerstoff zum Leben.
a. Wieviel Luft muß es einatmen, um denselben zu erlangen?
b. Wie lange reicht der Sauerstoff in der Luft eines Schulzimmers, das 180 *cbm* freien Raum hat, für 60 Kinder aus? (S.28)

2) An 12 Maurergesellen, 4 Handlanger und 3 Lehrlinge zahlt ein Meister in der Woche 258 ℳ. Ein Handlanger bekommt täglich 1,50 ℳ mehr als ein Lehrling und ein Geselle 0.75 ℳ mehr als ein Handlanger. Wieviel Lohn bekommt jeder für 1 Tag? (S.40)

12) Um sein Alter gefragt, gibt E zur Antwort: „Ich und mein Sohn zählen zusammen 100 Jahre. Vor 10 Jahren war ich dreimal so alt, wie mein Sohn damals war." Wie alt ist jetzt der Vater und wie alt ist sein Sohn? (S.55)

14) Ein Vater hinterläßt seinen 5 Kindern, nämlich 2 Söhnen und 3 Töchtern, ein Vermögen von 20 000 ℳ. Er bestimmt, daß jede Tochter noch einmal soviel erhalten soll als ein Sohn. Wieviel erhält jedes Kind? (S.56)

BREIDENBACH (1972)

4. Wolfgang wohnt in der Ortschaft A. Er will seinen Freund besuchen, der in der 40 km entfernten Ortschaft B wohnt. Wolfgang geht zu Fuß von A ab mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h. Eine Stunde später fährt verabredungsgemäß sein Freund mit dem Motorrad von B ab, ihm entgegen. Die Geschwindigkeit des Motoradfahrers ist 62 km/h. Vom Treffpunkt ab fahren beide mit dem Motorrad nach B. Wann und wo treffen sie sich? Wann kommen sie in B an? (S.67)

1. Ein Altbauer bekommt vom Hoferben neben freier Kost und Wohnung 3600 DM Altenteilrente. Welches Kapital hätte der Altbauer sparen müssen, um sich durch die Zinsen die gleiche Rente (4%) zu sichern? (S.90)

5. Ein Anbauschrank besteht aus 5 nebeneinander stehenden Schrankelementen. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es, wenn zwei bestimmte Anbauelemente bei jeder Anordnung nebeneinander stehen müssen? (S.107)

HAHN (1972)

3-79. Vater und Sohn sind zusammen 44 Jahre alt. In 13 Jahren beträgt das Alter des Sohnes $^3/_7$ von dem des Vaters.

3-88. Drei Freunde haben 15 000 DM in der Lotterie gewonnen. Der eine hat die Hälfte des Lospreises bezahlt, der zweite ein Drittel, der dritte den Rest. Der Gewinn soll im Verhältnis der Einlagen verteilt werden.

3-91. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, durch die eine in 20 Minuten, durch die andere in 30 Minuten. Wie lange dauert die Füllung, wenn aus beiden zugleich Wasser fließt?

3-121. Von zwei 150 km entfernten Orten fahren zwei Radfahrer einander entgegen. In derselben Zeit, in welcher der eine 24 km zurücklegt, schafft der andere 36 km. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die beiden, wenn sie zur gleichen Zeit aufbrechen und sich nach 7,5 Stunden treffen?

TRAEGER/UNGER/MEYER/VOGLER (1974)

1. Zwei Städte A und B sind 600 km voneinander entfernt. Morgens um 9 Uhr geht von A ein Güterzug nach B ab, der stündlich 60 km zurücklegt. Mittags um 12 Uhr geht ein Eilzug von B nach A ab, der stündlich 80 km zurücklegt. Wann und wo begegnen sich beide Züge? (S.73)

3. Ein U-Boot verläßt seinen Hafen um 8 Uhr mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten. Zwei Stunden später folgt ihm ein Schnellboot mit einer Geschwindigkeit von 40 Knoten. Wann holt es das U-Boot ein? (S.73)

3. Dieter sammelt Briefmarken. Er antwortet Inge auf die Frage nach der Anzahl seiner Marken: „Wenn ich doppelt soviel und noch $^1/_2$ mal soviel hätte, wie ich habe, so fehlten mir 25 an 200." Wieviel Briefmarken hat er? (S.74)

2. 5250 DM sollen so unter drei Schwestern verteilt werden, daß die zweite Schwester nur halb so viel wie die dritte, die erste nur halb so viel wie die zweite erhält. Wieviel erhält jede? (S.75)

3. Ein Vater hinterläßt seinen 3 Kindern 48 000 DM. Er bestimmt, daß jedes jüngere Kind 4 500 DM mehr erhalten soll als das nächstältere. Wieviel DM erbt jedes Kind? (S.75)

KUSCH/AITS (1975)

13. Ein Behälter enthält 450 l Wasser und wird bei geöffnetem Hahn in 12 Minuten gefüllt. Wieviel Liter Wasser waren in dem Behälter nach 7 Minuten vorhanden? (S.104)

14. Ein Meister ist 40 Jahre, sein Lehrling 15 Jahre alt. In wieviel Jahren ist der Meister doppelt so alt wie der Lehrling? (S.104)

4. Ein Bauer mußte wegen Futtermangels 38 Kühe verkaufen, weil sonst der Futtervorrat statt für 8 nur für 6 Wochen reichen würde. Wieviel Kühe besaß er? (S.106)

6. Ein Mann trinkt an einer Korbflasche Wein 21 Tage. Wenn ihm jedoch seine Frau hilft, schaffen beide es in 14 Tagen. Wie lange würde die Frau brauchen, um den Wein allein auszutrinken? (S.106)

WINTER/ZIEGLER (1972)

10. Ein Landwirt besitzt 8-mal soviele Kühe wie Schweine und nur halb so viele Pferde wie Schweine. Zusammen sind es 30 Tiere. Wie viele Kühe, Schweine und Pferde besitzt er? (S.47)

13. Eine Erbschaft von 12000 DM soll laut Testament so auf 4 Erben verteilt werden, daß der 1. Erbe ein Drittel des Geldes und die drei anderen Erben den Rest zu gleichen Teilen erhalten. Wieviel erhält jeder? (S.47)

14. Ein Parkplatz faßt 140 Autos. Er hat 2 Zufahrtstraßen (A und B), 1 Ausfahrtstraße (C). Durch die Straße A können pro Minute doppelt so viele Autos fahren wie durch die Straße B und durch die Straße C halb so viele wie durch die Straße B. Bei voller Belastung der 3 Straßen ist der Platz nach 10 Minuten voll besetzt. Wie viele Autos können auf den 3 Straßen pro Minute fahren? (S.48)

38. Infolge einer Fehlernte mußte ein Bauer 5 Kühe verkaufen, da sonst der Futtervorrat nur für 12 anstatt für 16 Wochen gereicht hätte. Wie viele Kühe besaß der Bauer ursprünglich? (S.49)

43. Drei Viertel der 16 Mädchen einer Klasse essen ein Früstücksbrot, ebenso 60% der Jungen dieser Klasse. Insgesamt essen 70% der Schüler der Klasse ein Frühstücksbrot. Wie viele Jungen sind in der Klasse? (S.50)

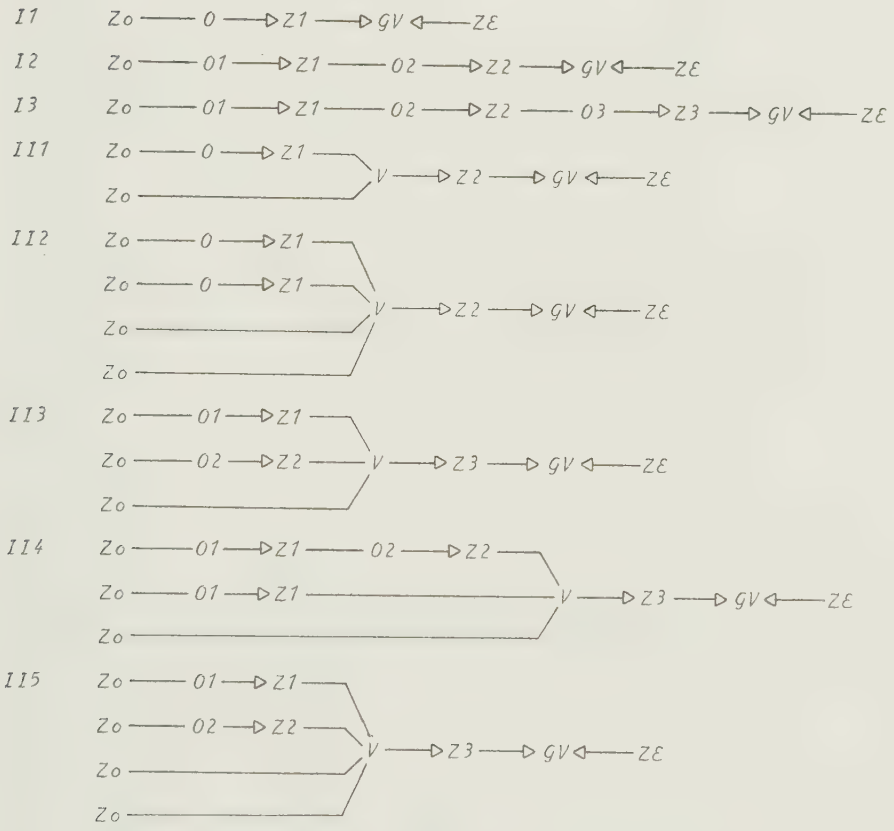
7.3. Anhang zur Erkundungsstudie

7.3.1. Schülerdaten

Zur besseren Einschätzung der Schüler wurden vor Durchführung der Erkundungsstudie die Schultests FAT 7-8 (Frankfurter Analogietest), VL 7-9 (Verständiges Lesen) und WST 7-8 (Wortschatztest) durchgeführt. Obwohl sich die erhobenen Daten als wenig aussagekräftig und zu grob für die Analyseebene der Studie erwiesen, werden sie hier der Vollständigkeit halber wiedergegeben.
Die Abkürzungen bedeuten: SS HST: Schülerbezeichnungen Hauptstudie, SS EKST: Schülerbezeichnungen Erkundungsstudie, PR: Prozentrang, IQ: Intelligenzquotient.

SS HST	SS EKST	Sex	Alter	FAT PR/IQ	VL PR	WST PR	Lehrerbeurteilung Mather.	allgemein	Bemerkungen
	1	w	15;1	31 92.5	35	2.6	3	3	Türkin
	2	m	13;7	31 92.5	65	65	4	4	Repetent
A	3	w	14;0	58 103	75	29	5	2/3	
	4	m	13;4	55 102	85	59	3	2/3	
B	5	m	14;2	75 109.5	25	2	4	4	Repetent Legasth.
C	6	m	13;4	86 116.5	95	59	3	2/3	
	7	w	14;7	14 83.5	45	13	5	4/5	
D	8	m	13;0	42 97	55	59	3	3/3	
E	9	m	13;10	86 116.5	95	59	2	3	Repetent Legasth.
F	10	w	13;5	79 108	65	57	3	2/3	
	11	m	13;5	54 101.5	65	74	4	3	
	12	m	14;0	69 107.5	65	47	3	3	Repetent
G	13	m	13;6	69 107.5	45	39	4	3	
H	14	w	14;1	66 106	85	58	2	2	Repetent
K	15	w	13;2	58 103	85	57	4/5	3/4	Legasth.
L	16	w	13;3	64 105	95	69	3	3	Repetent
M	17	w	13;3	15 84	45	39	4	3/4	
N	18	m	13;9	69 107.5	85	65	3	3	

7.3.2. Handlungsstrukturen der in der Erkundungsstudie verwendeten Textaufgaben



Es bedeuten: *Zo, Z1, Z2, Z3, ZE* Anfangs-, Zwischen-, Endzustände,
O, O1, O2 Handlungsoperatoren,
V Handlungsvorschriften,
GV Gleichsetzungsvorschriften
I lineare Handlungsstrukturen
II nichtlineare Handlungsstrukturen
1,...,5 weitere Unterscheidung der Strukturen
I, II durch zusätzliche Indizierung

7.3.3. Standardisierungen der Textaufgaben der Erkundungsstudie

Nr	Zu isolierende Textinformationen	Handlungsoperatoren explizit	implizit	Abfolge der Handlungsteile und MSS-Aufgabenrepräsentationen (MSSR)
1	TR1: Addiert man ... zwölf TR2: Fünffachen TR3: so erhält man einer Zahl zweiundvierzig	AO: +12 MO: ·5 GV: = Zo ZE: 42		$Zo \xrightarrow{MO} Z1 \xrightarrow{AO} Z2 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: $5x + 12 = 42$
2	TR1: 6 Jahre älter als TR2: 4 Jahre jünger als TR3: zusammen TR4: sind zusammen jüngste mittlere älteste 40 Jahre	AO1: +6 SO: -4 AV: + GV: = Zo Z1 Z2 ZE: 40	SO^{-1}: +4	$Zo \xrightarrow{SO^{-1}} Z1$; $Zo \xrightarrow{AO1} Z2$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: $x + 4$; $x + 6$ $x + x + 4 + x + 6 = 40$
3	TR1: subtrahiert man ... neun TR2: Dreifachen TR3: multipliziert ... mit vier TR4: so erhält man einer Zahl sechzig	SO: -9 MO1: ·3 MO2: ·4 GV: = Zo ZE: 60		$Zo \xrightarrow{MO1} Z1 \xrightarrow{SO} Z2 \xrightarrow{MO2} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: $(3x - 12)\cdot 4 = 60$
4	TR1: 150 DM weniger als TR2: das Doppelte TR3: die er ... besaß der Summe 1450 DM	SO: -150 MO: ·2 Zo ZE: 1450	GV: =	$Zo \xrightarrow{MO} Z1 \xrightarrow{SO} Z2 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: $2x - 150 = 1450$

Nr	Zu isolierende Textinformationen	Handlungsoperatoren explizit	implizit	Abfolge der Handlungsteile und MSS-Aufgabenrepräsentationen (MSSR)
5	TR1: 6000 DM weniger als TR2: 3000 DM mehr als TR3/ aus einer Erbschaft sollen TR4 ... verteilt werden jüngste mittlere älteste 36 000 DM	SO1: -6000 AO: +3000 OV: : Zo Z1 Z2 ZE: 36 000	AO^{-1}: -3000 GV: = AV: +	$Zo \xrightarrow{SO1} Z2$; $Zo \xrightarrow{AO^{-1}} Z1$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x - 6 000; x - 3 000 x + x - 6 000 + x - 3 000 = 36000
6	TR1: Addiert man ... sieben TR2: Vervierfachen TR3: multipliziert ... mit drei TR4: so erhält man einer Zahl neunundsechzig	AO: +7 MO1: ·4 MO2: ·3 GV: = Zo ZE: 69		$Zo \xrightarrow{MO1} Z1 \xrightarrow{AO} Z2 \xrightarrow{MO2} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: (4x + 7)·3 = 69
7	TR1: acht Jahre älter als TR2: zusammen TR3: sind zusammen einer der andere achtzig Jahre	AO: +8 AV: + GV: = Zo Z1 ZE: 80		$Zo \xrightarrow{AO} Z1$ $Zo, Z1 \xrightarrow{AV} Z2 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 8; x + x + 8 = 80
8	TR1: in sechs Stunden TR2: hat ... zurückgelegt in der Stunde 756 km	MO: ·6 GV: = Zo ZE: 756		$Zo \xrightarrow{MO} Z1 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: 6x = 756
9	TR1: Fünffache TR2: um sechs vermehrten TR3: ist einer ... Zahl 105	MO: ·5 AO: +6 GV: = Zo ZE: 105		$Zo \xrightarrow{AO} Z1 \xrightarrow{MO} Z2 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: (x + 6)·3 = 105

Nr	Zu isolierende Textinformationen	Handlungsoperatoren explizit	implizit	Abfolge der Handlungsteile und MSS-Aufgabenrepräsentationen (MSSR)
10	TR1: wiegt 8 kg mehr als TR2: 13 kg weniger TR3: zusammen TR4: wiegen zusammen TR5: Lothar und Günter haben das gleiche Gewicht Lothar Günter Hanns Siegfried 335 kg	AO: +8 SO: -13 AV: + Zo Zo Z1 Z2 ZE: 335	GV: =	$Zo \xrightarrow{AO} Z1$; $Zo \xrightarrow{SO} Z2$ $Zo, Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 8; x - 13 x + x + x + 8 + x + 13 = 335
11	TR1: 15 Minuten weniger als TR2: 7 Minuten weniger als TR3: Lothar ... weniger als Rainer und dieser wiederum ... weniger als Hanns TR4: zählt man ... zusammen TR5: erhält man Hanns Rainer Lothar 97 Minuten	SO1: -15 SO2: -7 AV: + GV: = Zo Z1 Z2 ZE: 97		$Zo \xrightarrow{SO2} Z1$; $Z1 \xrightarrow{SO1} Z2$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x - 7; x - 7 - 15
12	TR1: 62 DM mehr als TR2: 16 DM weniger TR3: zusammen TR4: haben zusammen gespart TR5: Elke und Sonja sparten den gleichen Betrag Elke Sonja Magda Eva 930 DM	AO: +62 SO: -16 AV: + Zo Zo Z1 Z2 ZE: 930	GV: =	$Zo \xrightarrow{AO} Z1$; $Zo \xrightarrow{SO} Z2$ $Zo, Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 62; x - 16 x + x + x + 62 + x - 16 = 930

Nr	Zu isolierende Textinformationen	Handlungsoperatoren explizit	implizit	Abfolge der Handlungsteile und MSS-Aufgabenrepräsentationen (MSSR)
13	TR1: a 5 cm kürzer als TR2/ Umfang TR3 Umfang Rechteck b a 55 cm	SO: -5 Zo Z1 ZE: 55	AV: + GV: =	$Zo \xrightarrow{SO} Z1$ $Zo, Zo, Z1, Z1 \xrightarrow{AV} Z2 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x - 5 x + x + x + 5 + x + 5 = 55
14	TR1: 120 m kürzer als TR2: 264 m kürzer als TR3: Seite a ... kürzer als ... Seite b und diese wiederum ... kürzer als ... Seite c TR4/ Umfang TR5 Umfang Dreieck c b a 780 m	SO1: -120 SO2: -264 Zo Z1 Z2 ZE: 780	AV: + GV: =	$Zo \xrightarrow{SO2} Z1$; $Z1 \xrightarrow{SO1} Z2$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x - 264; x - 264 - 120 x + x - 264 + x - 264 - 120 = 780
15	TR1: 62 m länger als TR2: 16 m kürzer TR3/ Umfang TR4 Umfang TR5: a und b sind gleichlang Viereck a b c d 930 m	AO: +62 SO: -16 AV: + Zo Zo Z1 Z2 ZE: 930	GV: =	$Zo \xrightarrow{AO} Z1$; $Zo \xrightarrow{SO} Z2$ $Zo, Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 62; x - 16 x + x + x + 62 + x - 16 = 930

Nr	Zu isolierende Textinformationen	Handlungsoperatoren explizit	implizit	Abfolge der Handlungsteile und MSS-Aufgabenrepräsentationen (MSSR)
16	TR1: 7 Punkte mehr als TR2: 3 Punkte mehr als TR3: Johannes ... mehr als Stefan und dieser ... mehr als Thomas TR4: zusammen TR5: haben zusammen erreicht Thomas Stefan Johannes 31 Punkte	AO1: +7 AO2: +3 AV: + Zo Z1 Z2 ZE: 31	GV: =	$Zo \xrightarrow{AO2} Z1$; $Z1 \xrightarrow{AO1} Z2$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 3; x + 3 + 7 x + x + 3 + x + 3 + 7 = 31
17	TR1: braucht 8 Sekunden, TR2: Gorden 11 Sekunden länger TR3: zählt man ... zusammen TR4: ergeben sich Alf Dietrich Gorden 335 Sekunden	AO1: +8 AO2: +11 AV: + GV: = Zo Z1 Z2 ZE: 335		$Zo \xrightarrow{AO1} Z1$; $Zo \xrightarrow{AO2} Z2$ $Zo, Z1, Z2 \xrightarrow{AV} Z3 \xrightarrow{GV} ZE$ MSSR: x + 8; x + 11 x + x + 8 + x + 11 = 335

Erläuterungen: Alle Handlungsoperatoren wurden in dieser Übersicht in MSS codiert. AO: Additions-, SO: Subtraktions-, MO: Multiplikations-, DO: Divisionsoperator; AO^{-1}, SO^{-1}: invertierter Additions- bzw. Subtraktionsoperator; AV: Additions-, DV: Divisions-, GV: Gleichsetzungsvorschrift; Zo, Z1, ... , ZE: Anfangs-, Zwischen-, Endzustände.

7.3.4. Strategien und Strategievarianten in den schriftlichen Schüleraufzeichnungen zur Erkundungsstudie

A1 1 $5x + 12 = 42$

2 $42 - 12 = 30$, $30 : 5 = 6$
21 $42 : 12 = 3{,}5$

01 $5 \cdot 6 = 30 + 12 = 42$

A2 1 jüngste:= x, mittlere:= x + 6
älteste:= x + 6
$x + x + 4 + x + 6 = 40$

01 $40 : 2 = 20$, $20 - 4 = 16$
$20 - 6 = 14$, $4 + 5 = 10$
02 $40 : 3 = 13$, $13 - 3 = 10$,
$13 + 3 = 16$, $16 - 2 = 14$

A3 1 $(3x - 9) \cdot 4 = 60$
11 $3x - 9 \cdot 4 = 60$
12 $3x - 9 \cdot y \cdot 4 = 60$

2 $60 : 4 = 15$, $15 + 9 = 24$, $24 : 3 = 8$

01 $39 - 9 = 30 : 2 = 15 \cdot 4 = 60$
02 $8 \cdot 3 = 24$, $24 - 9 = 15$, $15 \cdot 4 - 60$

A4 1 $2x - 150 = 1450$
11 $2x + 150 = 1450$

2 $1450 + 150 = 1600$, $1600 : 2 = 800$
21 $1450 + 150 = 1600$, $1600 \cdot 2 = 3200$
22 $1450 - 150 = 1300$, $1300 : 2 = 650$
23 $1450 : 2 = 725$, $725 - 150 = 575$

A5 1 jüngste:= x, mittlere:= x - 3000,
älteste:= x - 6000

$x + x - 3000 + x - 6000 = 36000$
11 $x + 3000 + - 6000 + x + 6000 = 36000$

2 $36000 : 3 = 12000$, $12000 - 3000 = 9000$,
$12000 + 3000 = 15000$
21 $36000 : 3 = 1200$, $1200 + 300 = 1500$
$1500 - 600 = 900$
Differenz zwischen 1200 und 900 ist die mittlere.
22 $36000 : 3 = 12000$
$12000 - 6000 = 6000$ (Ä)
$12000 - 3000 =$ (M), 21000 : J

01 $x = 36000 - 6000$
02 $x + 36000 = 45000$

A6 1 $(4x + 7) \cdot 3 = 69$
11 $4x + 7 \cdot 3 = 69$

2 $69 : 3 = 23$, $23 - 7 = 16$, $16 : 4 = 4$

	21	69 : 3 = 23 - 4 = 19
	22	99 : 3 = 33 - 7 = 26
	C1	4 · 4 = 16, 16 + 7 = 23, 23 · 3 = 69
	C2	4 · 4 + 7 · 3 = 69
A7	1	x + x + 8 = 80
	11	2x = 80, x = 40, 34, 36
	12	2(x + 8) = 80
	2	80 : 2 = 40, 40 + 4 = 44, 40 - 4 = 36
	21	Durchschnitt 40 J. 80 - 48 = 32, 48, 32
	22	80 : 3 = 26.6, 26 : 2 = 13, 13, 6
	C1	x + 8 = y, 36 + 8 = 44, 36, 44
	C2	40 - 4 = 36, 40 + 4 = 44, zusammen 80
A8	1	6x = 756
	2	756 : 6 = 126
A9	1	(x + 6) · 5 = 105
	11	x · 5 + 6 = 105
	12	30x = 105
	13	6 + x = 105
	14	5 · (x + 6) = 105
	21	105 - 6 = 99, 99 : 5 = 19.8
A10	1	Lothar, Günther:= x, Hanns:= x + 8, Siegfried:= x - 13
		x + x + x + 8 + x - 13 = 335
	11	3x + 8 = 335
	12	8x - 13 = 335
	21	335 : 4 = 83.75
A11	11	Hanns:= x, Rainer:= x - 7, Lothar:= x - 15 - 7
		x + x - 7 + x - 22 = 97
	111	x + x + 7 + x + 22 = 97
	112	x + x - 7 + x - 15 = 97
	12	Rainer:= x, Lothar:= x - 15, Hanns:= x + 7
		x + x + 7 + x - 15 = 97
	121	x + x + 7 + x + 15 = 97
	131	x + x - 15 + x - 22 = 97
A12	1	Elke, Sonja:= x, Magda:= x + 62, Eva:= x - 16
		x + x + x + 62 + x - 16 = 930
	11	x + x + x + 62 + x + 16 = 930

A13 11 a:= x - 5, b:= x
x - 5 + x + x + x - 5 = 55
111 x + x - 10 = 55
112 x + x + x - 5 = 55
113 x + x - 5 = 55
12 a:= x, b:= x + 5

21 55 : 4 = 16.25

A14 11 a:= x, b:= x + 120, c:= x + 120 + 264
x + x + 120 + x + 384 = 780
111 x + x + 120 + x + 264 = 780
12 b:= x, a:= x - 120, c:= x + 264
x + x - 120 + x + 264 = 780
13 c:= x, b:= x - 264, a:= x - 264 - 120
x + x - 264 + x - 384 = 780
131 x + x - 264 + x + 120 = 780
132 x + x - 264 + x - 120 = 780
14 a = b - 120, b = c - 264
3c - 264 - 384 = 780

01 a:= x, b:= b - 120 = a, c - 264 = b
b - 120 = x, c - 264 = x
x + x + x + x + x - 120 + x - 264 = 780

A15 1 a, b:= x, c:=x + 62, d:= x - 16

x + x + x + 62 + x - 16 = 930
11 x + x + x - 62 + x - 16 = 930
12 4x + x + x + x + 62 + x - 16 = 930

A16 11 Thomas:= x, Johannes:= x + 7 + 3,
Stefan:= x + 3
x + x + 10 + x + 3 = 31
111 x + x + 7 + x + 3 = 31
112 x + x + x + x + 7 + x + 3 = 31
12 Stefan:= x, Johannes:= x + 7,
Thomas:= x - 3
x + x + 7 + x - 3 = 31

01 30 : 3 = 10, 10 + 7 = 17, 3 + 3 = 6, 7 + 1 = 8

A17 1 Alf:= x, Dietrich:= x + 8,
Gorden:= x + 11

x + x + 8 + x + 11 = 335
11 x + x + x + x + 11 + x + 8 = 335

7.4. Anhang zur Hauptstudie

7.4.1. Prozeßprotokolle zur Hauptstudie

Prozeßprotokoll Aufgabe 1, S B

1	B	*(liest)*
2		*Also muß ich die 280 Mark von den 1120 abziehn.*
3	I	*Hm.*
4	B	*Und dann hab ich raus,*
5		*wieviel Geld er gespart hat.*
6	I	*Hm.*
7	B	*Und jetzt das andere, oder was?*
8	I	*Nein, nein. Nun rechne sie mal aus!*
9	B	*Hm.*
10		*Des is ...*
11		*(liest und stöhnt)*
12		*Was muß ichn da machen?*
13	I	*Ich sag dir nichts.*
14	B	*Ach klar.*
15		*Da muß ich 280 minus 1120.*
16		*(notiert: 280 - 1120 = 840)*
17		*Und wenn ich das dann abzieh,*
18		*kommt 840 raus.*
19		*Und soviel kost das Moped dann, 840.*
20	I	*Hm.*
21	B	*Und soviel kost dann das Moped.*
22	I	*Hm.*
23	B	*Ja! ...*
24		*Halt!*
25		*Und des, des kost des Moped.*
26		*Ja und ...*
27		*Ach so! Gar keins.*
28		*He! Wenn er soviel Geld gespart hat wie das da,*
29	I	*Hm.*
30	B	*dann erhält er ja gar keins von seim Vadder.*
31	I	*Wenn du meinst.*
32	B	*Naja, was soll dann die Frage?*

33 I Tja, vielleicht solltest du nochmal den Text lesen?
34 B Vielleicht, ja.
35 (liest)
36 He! Bin ich denn blöd?
37 Was will der jetzt kaufen?
38 Das billige oder das teure?
39 Das billigere Moped!
40 I Hm.
41 B Aber dafür, dafür hatter doch das Geld. ...
42 I Du bist also der Meinung, daß er kein Geld bekommt?
43 B Nee, weil er doch sagt,
44 daß das eine 280 Mark billiger is,
45 als er schon Geld hat.
46 Also brauch er kein Geld mehr,
47 hatter ja noch Geld übrich.

Prozeßprotokoll Aufgabe 3, S K

1 K (liest)
2 Aha! ...
3 I Was denkst du?
4 K Wer das x is. ...
5 Also, das is dreimal so alt.
6 Nee. ...
7 X is des, die Großmutter.
8 Nee.
9 X is die Andrea und ... (stöhnt)
10 Ja, x minus 6 is die Andrea.
11 I Wieso?
12 K Also nee. Ich versteh des net.
13 Also x is die Andrea,
14 weil ich nich weiß, wie alt sie is.
15 Und vor sechs Jahren,
16 war se x minus 6.
17 Nee.
18 (notiert: x - 6 = 66)
19 Also die Großmutter is x.

I Du benennst also x um?
K Ja genau.
X is nich die Andrea,
sondern die Großmutter vor sechs Jahren.
Hm. Das kann ja eigentlich nich stimmen.
Da muß ich erst nochmal nachdenken.
(liest)
Also, der Thomas, der fragt jetzt die Andrea nach ihrem
Alter. Und die meint, die will das dem nich sagen. Und
da - wahrscheinlich is sie en Mathegenie oder so -
und da sagt sie dann, daß ihre Großmutter genau vor
sechs Jahren dreimal so alt war wie sie.
Und heute is sie 66.
Da hab ich mir jetzt gedacht,
wenn ich von den 66
sechs Jahre abzieh,
dann war se damals 60.
Und wenn se vor sechs Jahren
dreimal so alt war wie sie,
I Hm.
K dann müßte se jetzt 20 sein.
I Aha.
K Hm, hm.
I Biste sicher?
K (liest)
Ich bin immer noch der Meinung.

Prozeßprotokoll Aufgabe 5, S M

M (liest halblaut)
Die hab ich schon voriges Mal gerechnet.
I Nee, das war ne andere.
Wie würdest du die denn rechnen?
M Mit ner Gleichung.
I Aha.
M x mal 5 plus 11 minus 3 gleich 273 - 237.

8 I *Na, dann schreibs mal auf.*
9 M *(liest)*
10 *Also x is die Zahl wo ich net weiß.*
11 I *Ja.*
12 M *Und das Fünffache einer Zahl.*
13 *Also das muß mal x*
14 *und das sind fünf x.*
15 *Und ...*
16 *minus 11,*
17 *plus drei.*
18 I *Hm.*
19 M *Nee. Die drei muß mer ja nachher dazuzählen, zu den zwo.*
20 I *Wozu?*
21 M *Zu der Zahl!*
22 I *Aha.*
23 M *Naja, schreiben wir plus 3.*
24 *(notiert: 5x - 11 + 3 = 237)*
25 *(liest)*
26 *Multipliziert man die Differenz ...*
27 *Differenz heißt doch ...*
28 *das Ergebnis wemmer fertich is, gell?*
29 I *Ja.*
30 M *(löst die Gleichung:* $5x - 11 + 3 = 237$ $5x - 8 = 237 \mid (+8)$ $5x = 245 \mid (:5)$ $x = 49$)
31 *49.*
38 I *Was hast du jetzt?*
39 M *Ja die Zahl.*

Prozeßprotokoll Aufgabe 6, S G

1 G *(liest)*
2 *Hm.*
3 I *Was denkste?*
4 G *Naja, wemmer jetzt beide Rohre*
5 *bis zur Hälfte braucht,*

6		das eine Rohr mit 20 Minuten,
7		10 Minuten und das 15,
8	I	Hm.
9	G	also dann, dann müßts an un für sich $12\frac{1}{2}$,
10	I	Hm.
11	G	müßt sone, müßten se brauchen, zusammen.

Prozeßprotokoll Aufgabe 7, S E

1	E	(liest)
2		Brigit heißt die - oder?
3	I	Birgit.
4	E	Ach Birgit, hm, hm.
5		(liest) ...
6		58 Punkte erreicht ...
7		Also, das könnt ich ja erst ma ganz einfach machen.
8		Wieviel sind das denn?
9		Das sind 4 zusammen.
10		Is mir zu blöd.
11		Also hier. Die Birgit und die Martina
12		ham die gleiche Punktzahl erreicht.
13		Da nemm ich jetzt einfach mal an 20.
14		Ah! Nee! Jeder 20!
15		Nemm ich für jeden 10 an.
16		Also das wärn erst mal 10 für die B und die M. So.
17		(notiert: B = 10, M = 10)
18		Das wär ... halt!
19		(liest) ... gleiche Punktzahl erreicht,
20		Thomas hat 6 Punkte mehr als jede der beiden.
21		Der hat 6 Punkte mehr.
22		Wärn 17, Thomas 17.
23		(notiert: T = 17)
24		Äh, Daniela hat 4 Punkte weniger.
25		Die hat 4 Punkte weniger auch als beide.
26		Das wär Daniela, das wär 7.
27		(notiert: D = 7)

Sind 46.
Also stimmts net.
Ich kann auch annehm, daß es 12 sind.
46, das wärn 58.
Da müßt ich bei jeder 6 dazuzähln,
wenns 12 mehr sind.
Ma probiern.
17, (notiert: B = 17, M = 17).
Der hat hier weniger, hat hier ...
Ach 7 auch noch!
Nee, nemmer net 17,
nehm mer ma 14.
(korrigiert: 7 = 17 in 7 = 7)
Da brauch ich doch ne kleinere Zahl.
Thomas hat ...
Ach nee, der hat 7 mehr!
Ach ich komm auch ganz durchenanner hier.
(korrigiert: 7 = 7 in 7 = 17, B = 17 in B = 14, M = 17 in M = 14)

I Weil ich hier sitze?

E Nee, bei soviel Text.
Das is so durchenanner geschrieben,
das könnt mer viel einfacher schreiben.
Der hat dann 4 mehr anstatt 4 weniger.
Nee, 6 mehr.
Hat er 20.
(notiert: 7 = 20)
Und die hat wieviel weniger?
Wo stehts?
4 Punkte weniger.
Die hat dann genau 10.
10, 20, 30, 40, 50, hammer 58.
So stimmts.

I Hm.

E Naja, es geht bestimmt noch einfacher, aber ich bleib
bei der Methode.

Prozeßprotokoll Aufgabe 8, S H

1	H	(liest)
2	I	Na?
3	H	Ich muß erst überlegen, wie ich das am besten rechne.
4		Ich mußn Weg finden.
5	I	Wo hängts denn?
6	H	(aggressiv) Ich weiß net wie ich das rechnen muß.
7		(klopft mit dem Bleistift auf den Tisch)
8		Ach Gott nee. Ich weiß doch gar net wie dat gehn soll.
9		Also er is 33
10		un sie is 12.
11		Un wann is der Vater doppelt so alt
12		wie die Tochter?
13		Ach ich kann mit der Aufgabe nix anfangen.
14	I	Was stört dich denn?
15	H	Ich weiß net wie ich die rechnen muß.
16		Ich hab kein Rechenweg.
17		Mit ner Gleichung kann ich se net lösen, das weiß ich
18		schon lang.
19	I	Gibts keine andre Möglichkeit?
20	H	Ja das weiß ich ja net. Wenn ichs ja wüßte, würd ichs
21		ja rechnen.
22		Es kann natürlich so ähnlich gehn wie bei dem Wasserhahn.
23	I	Hm.
24	H	34, 13.
25		Die ham ne Differenz von 21.
26		Ham die auch in nem Jahr.
27		Die ham se ja immer.
28	I	Aha.
29	H	Ja, müssen se ja.
30		Da muß der seine Tochter gekriegt ham, als er 21 war.
31		Also ne Differenz von 21.
32		Wenn der Vadder 42 is.
33		In 9 Jahrn!
34	I	Wie kommstn da drauf?
35	H	Er hat die Tochter gekriegt mit 21.

36 Un dann isse genau 21 wenn er 42 is,
37 dann isse genau halb so alt wie er is.

7.4.2. Standardisierungs- und Prozeßdiagramme zu den Aufgaben 2; 5: SS A, D, E; 7: SS G, N, K; 9: S F .

Erklärung der verwendeten Symbole und Abkürzungen:

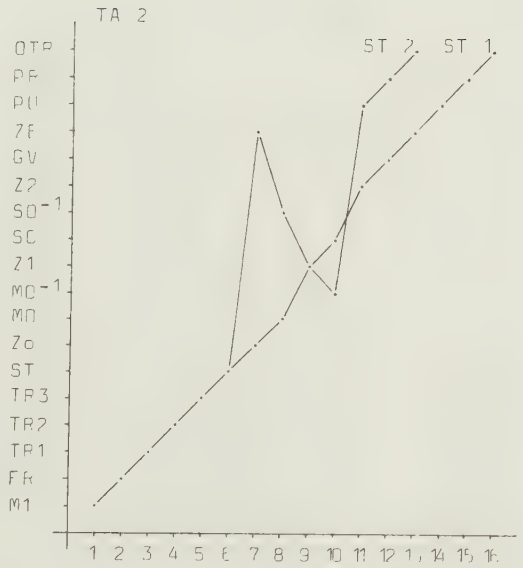
. nonverbale Aktivitäten der Schüler (M1: stilles Textlesen, sonst schriftliche Aufzeichnungen)
▭ MTS- Verbalisierung
○ IL- Verbalisierung
△ MUS- Verbalisierung
⊙,◬ IL-, MUS- Verbalisierung und gleichzeitige Notation
¦ Verbalisierung bezieht sich auf
○,△ nur bei ST (M3): Verbalisierung einer Teilstrategie
●,▲ nur bei ST (M3): Verbalisierung einer Gesamtstrategie

M1 Textlesen
FR Frage zum Text
TR Textrelation
ST Strategie
Zo
Z1
: Anfangs-, Zwischen-, Endzustand
ZE

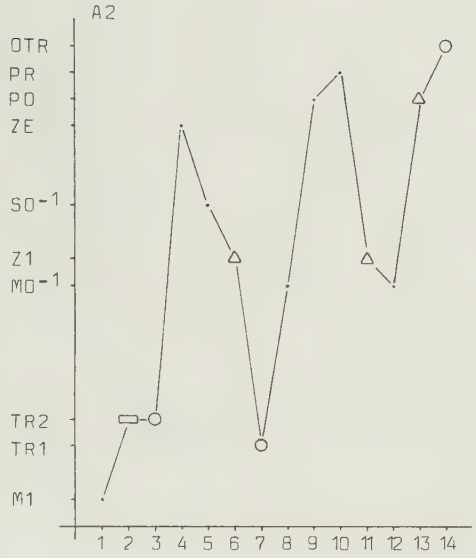
AO	Additionsoperator	AO^{-1}	inverser AO
SO	Subtraktionsoperator	SO^{-1}	inverser SO
MO	Multiplikationsoperator	MO^{-1}	inverser MO
DO	Divisionsoperator	DO^{-1}	inverser DO

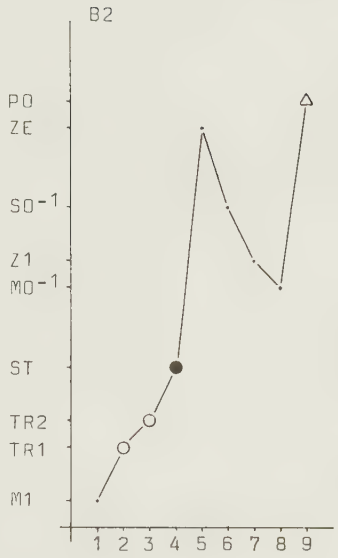
AV Additionsvorschrift
GV Gleichsetzungsvorschrift
PO Prozeßoperator
OTR Operatortransfer

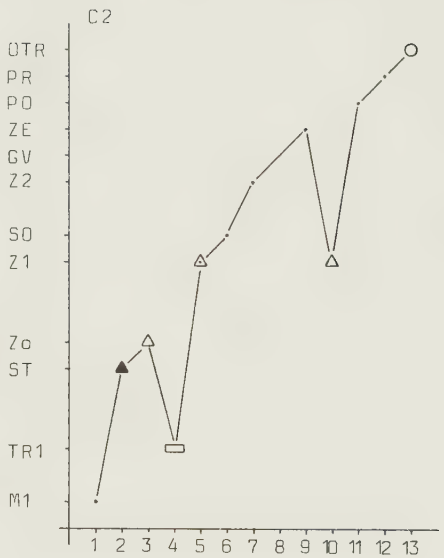
Ordinate: Prozeßelemente
Abszisse: Schrittfolgen

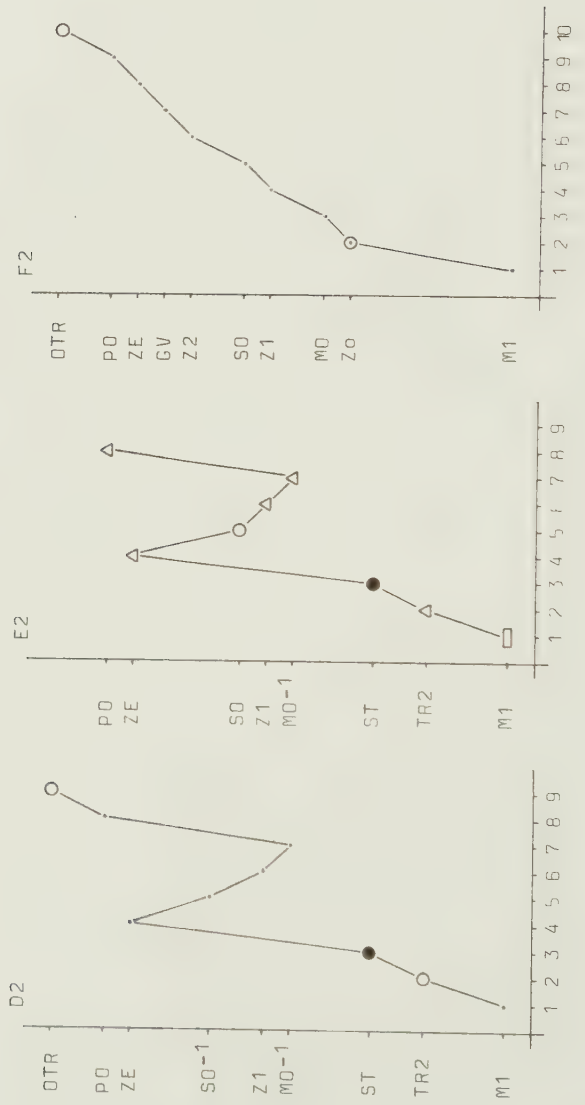


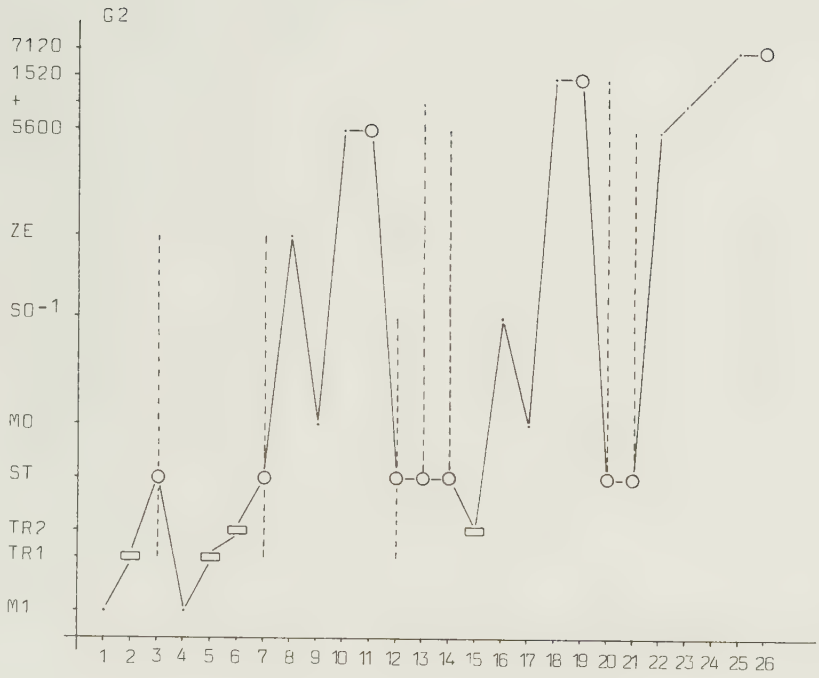
	ST 1	ST 2
OTR	Operatortransfer	
PR	Probe	
PU	Prozeßoperator	
ZE	1400	
GV	=	
Z2	4x - 380	
SO-1		+380
SO	-380	
Z1	4x	1780
MO-1		:4
MO	.4	
Zo	x	
ST	Strategie	
TR3	Gleichsetzungsvorschrift	
TR2	vermindert um 380	
TR1	das Vierfache	
FR	Frage	
M1	Textlesen	

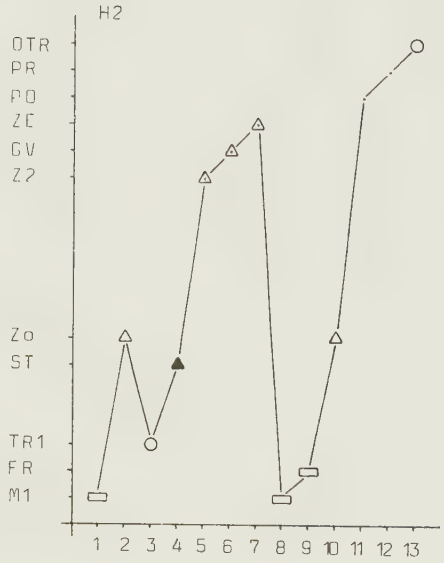

A2
OTR
PR
PO
ZE
SO-1
Z1
MO-1
TR2
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

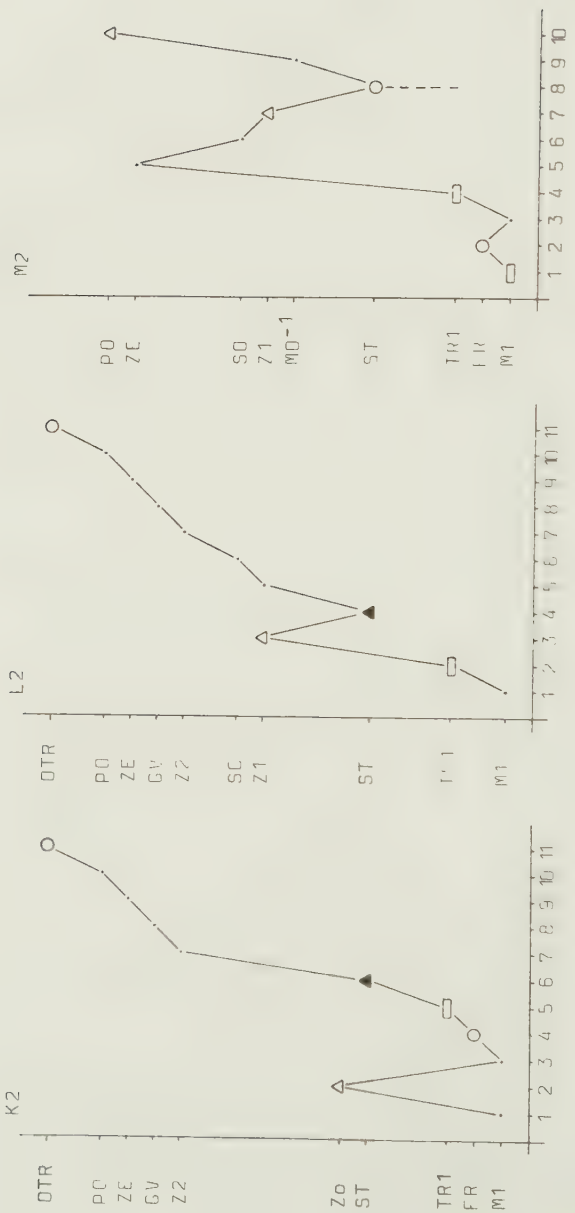

B2
PO
ZE
SO-1
Z1
MO-1
ST
TR2
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9

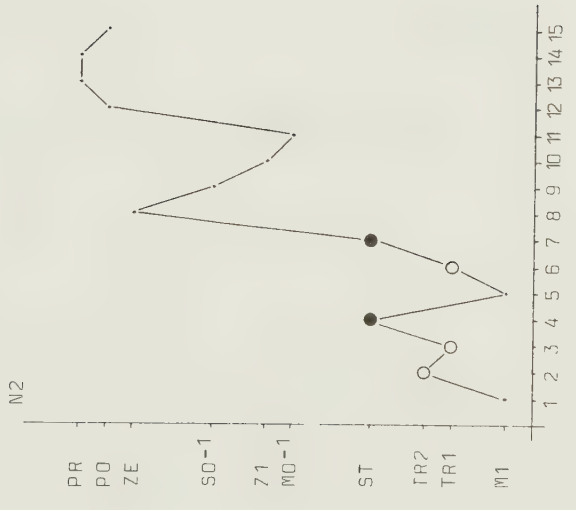

C2
OTR
PR
PO
ZE
GV
Z2
SO
Z1
Zo
ST
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

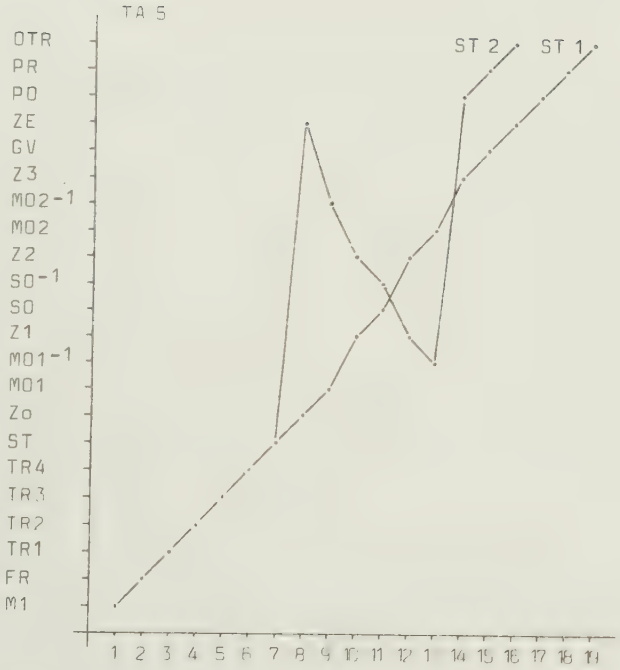

D2
OTR
PO
ZE
SO-1
Z1
MO-1
ST
TR2
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
E2
PO
ZE
SO
Z1
MO-1
ST
TR2
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
F2
OTR
PO
ZE
GV
Z2
SO
Z1
MO
Zo
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


G2
7120
1520
+
5600
ZE
SO-1
MO
ST
TR2
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

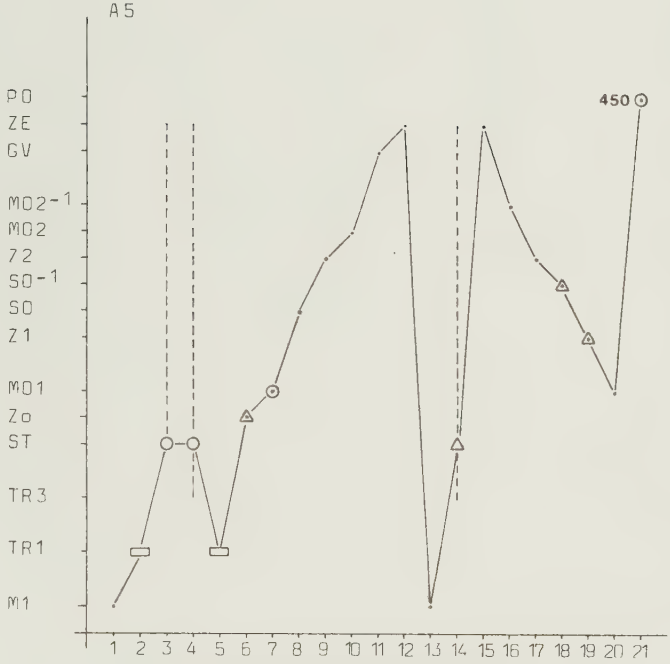

H2
OTR
PR
PO
ZE
GV
Z2
Zo
ST
TR1
FR
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

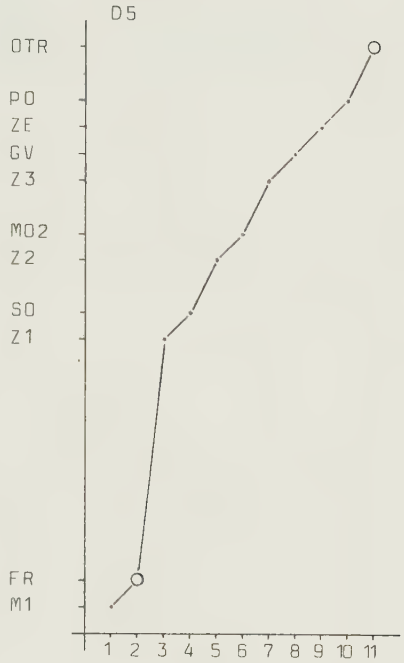

K2
OTR
PO
ZE
GV
Z2
Zo
ST
TR1
FR
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
L2
OTR
PO
ZE
GV
Z2
SO
Z1
ST
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
M2
PO
ZE
SO
Z1
MO-1
ST
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

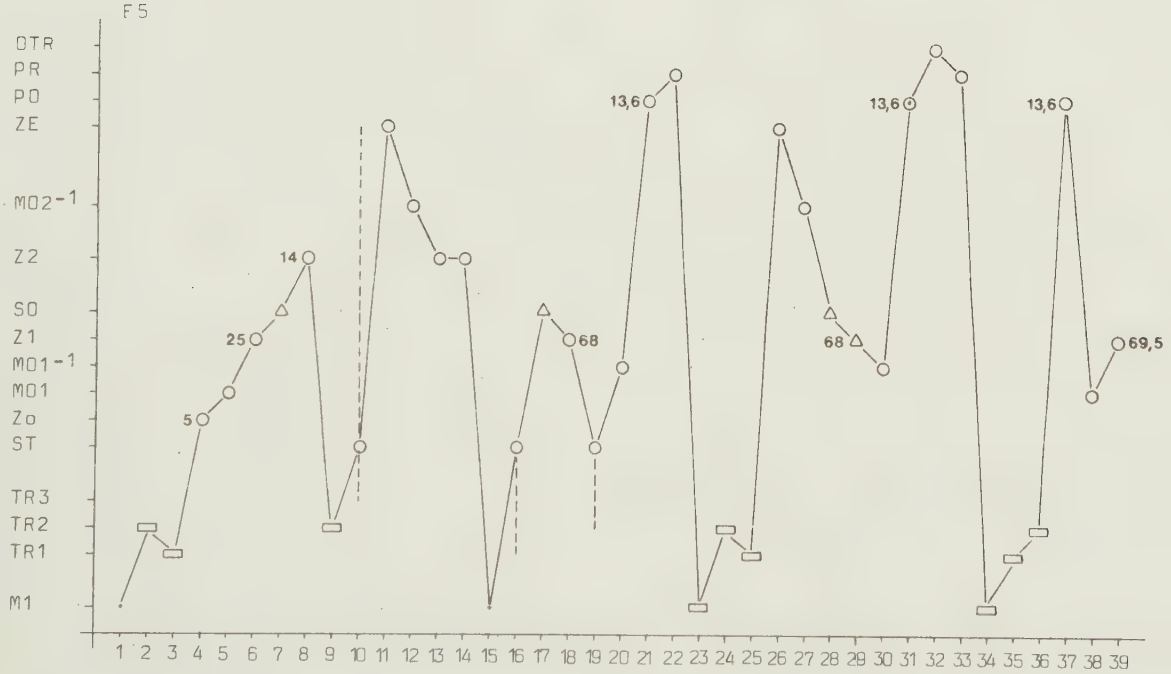

N2
PR
PO
ZE
SO-1
71
MO-1
ST
TR2
TR1
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

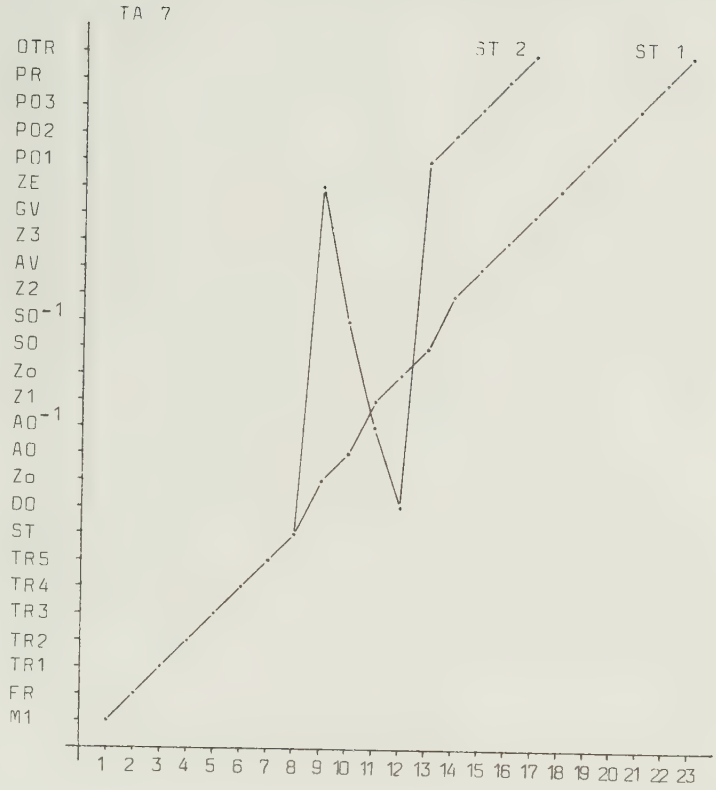


	ST 1	ST 2
OTR	Operatortransfer	
PR	Probe	
PO	Prozeßoperator	
ZE	237	
GV	=	
Z3	3(5x-11)	
MO2-1		:3
MO2	·3	
Z2	5x-11	79
SO-1		+11
SO	-11	
Z1	5x	
MO1-1		:5
MO1	·5	
Zo	x	
ST	Strategie	
TR4	so erhält man	
TR3	multipliziert mit drei	
TR2	fünfmal	
TR1	subtrahiert man elf	
FR	Frage	
M1	Textlesen	

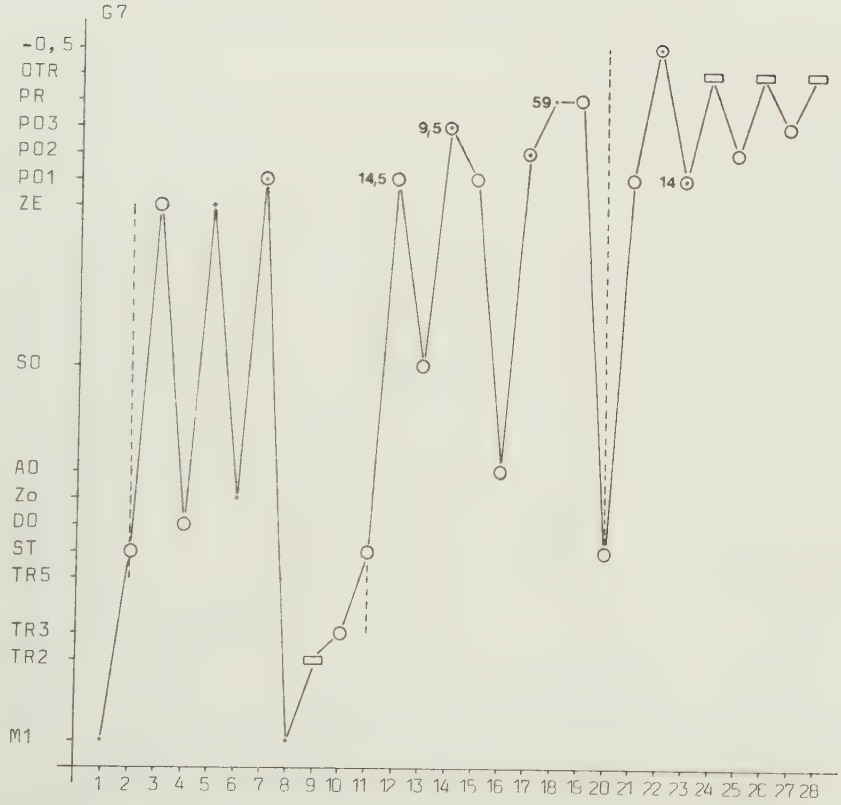

A5
PO
ZE
GV
MO2-1
MO2
Z2
SO-1
SO
Z1
MO1
Zo
ST
TR3
TR1
M1
450
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

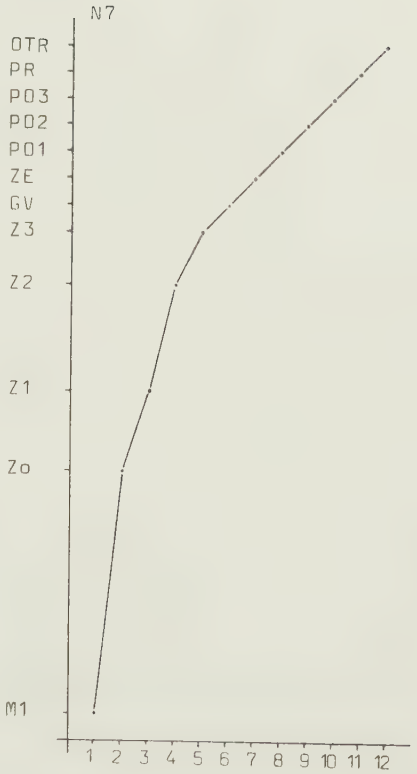

D5
OTR
PO
ZE
GV
Z3
MO2
Z2
SO
Z1
FR
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

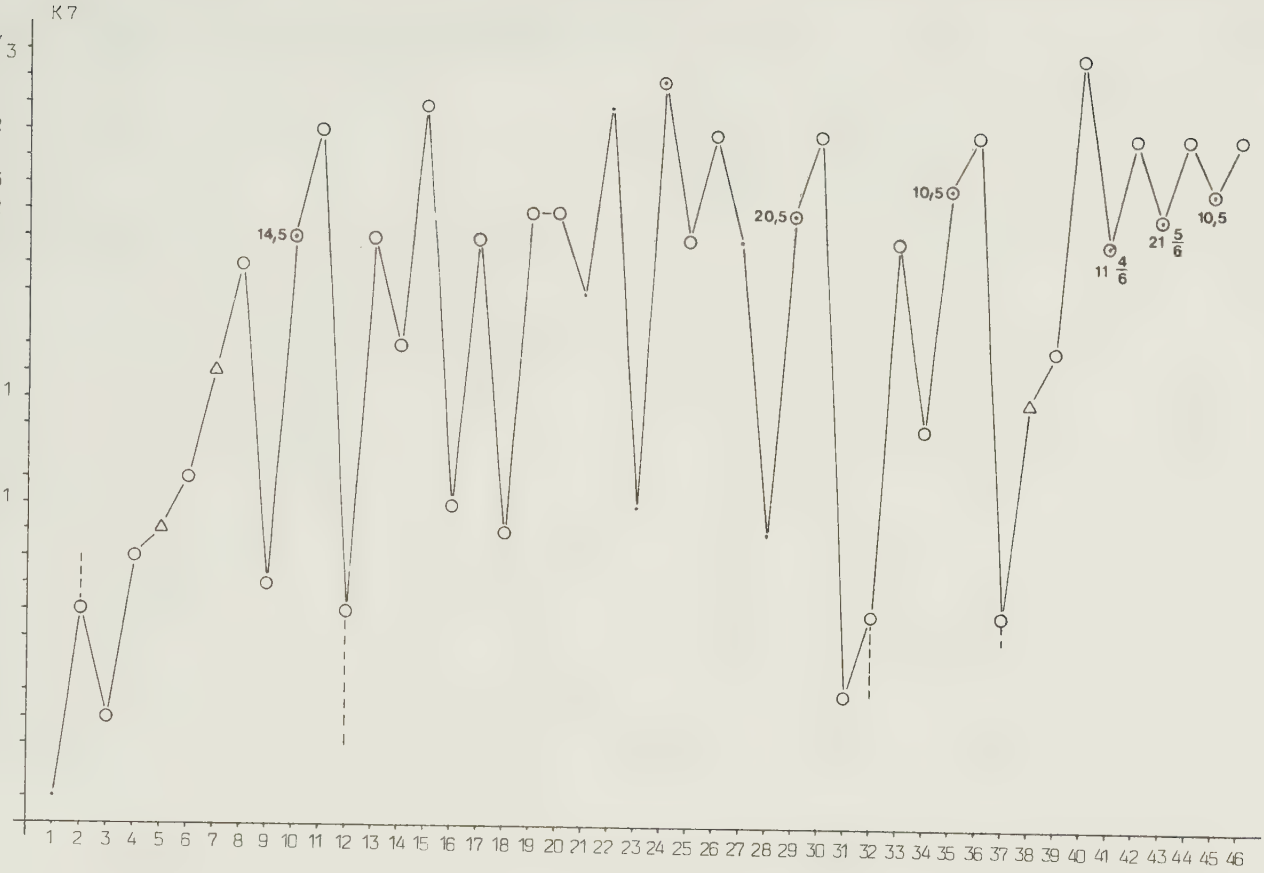

F5
OTR
PR
PO
ZE
MO2-1
Z2
SO
Z1
MO1-1
MO1
Zo
ST
TR3
TR2
TR1
M1
5
25
14
68
13,6
13,6
68
13,6
69,5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39

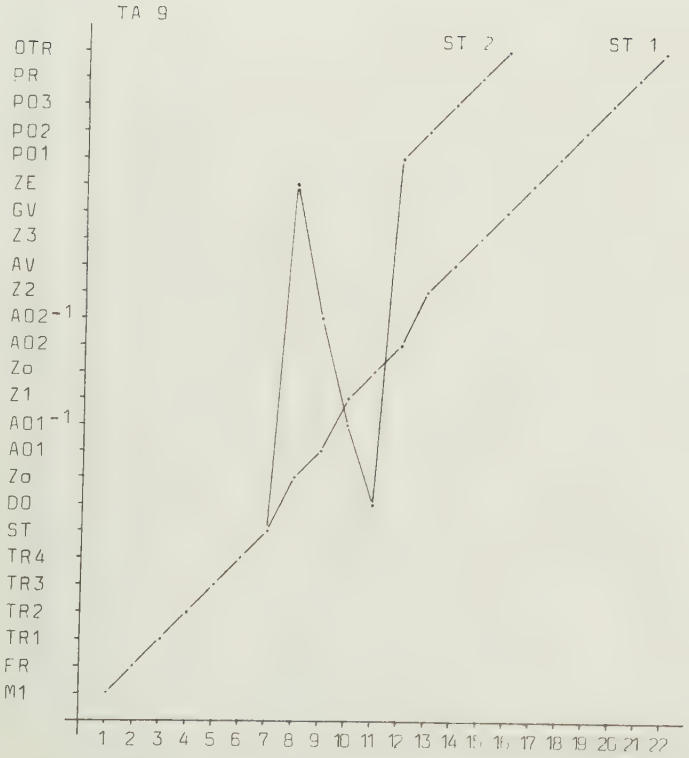


	ST 1	ST 2
OTR	Operatortransfer	
PR	Probe	
PO3	Prozeßoperator 3	
PO2	Prozeßoperator 2	
PO1	Prozeßoperator 1	
ZE	58	
GV	=	
Z3	4x + 2	
AV	+	
Z2	x - 4	
SO-1		+4
SO	-4	
Zo	x	
Z1	x + 6	
AO-1		-6
AO	+6	
Zo	x	
DO	:4	
ST	Strategie	
TR5	Gleichsetzungsvorschrift	
TR4	haben zusammen	
TR3	D vier Pkte weniger	
TR2	Th erreichte sechs Pkte mehr	
TR1	B und M haben die gleiche Pktz.	
FR	Frage	
M1	Textlesen	

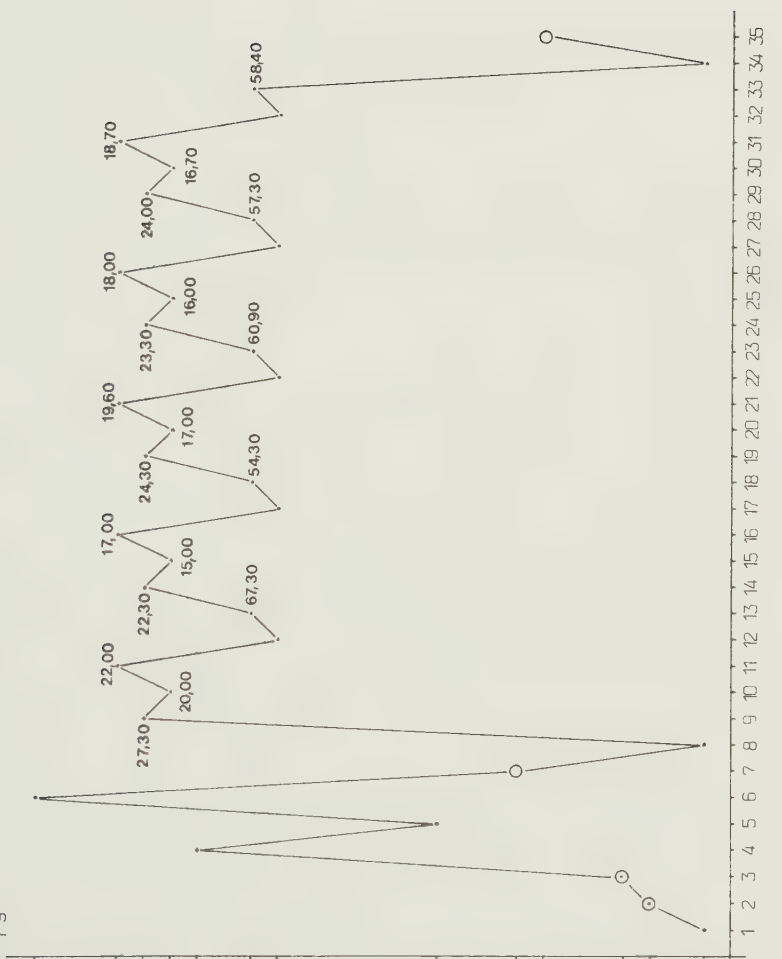

G7
-0,5
OTR
PR
PO3
PO2
PO1
ZE
SO
AO
Zo
DO
ST
TR5
TR3
TR2
M1
14,5
9,5
59,-
14
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28


N7
OTR
PR
PO3
PO2
PO1
ZE
GV
Z3
Z2
Z1
Zo
M1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


K7
1 1/3
23
29
OTR
PR
PO3
PO2
PO1
ZE
GV
AV
Z2
SO-1
SO
Z1
AO-1
AO
Zo
DO
ST
TR5
TR3
TR2
TR1
M1
14,5
20,5
10,5
11 4/6
21 5/6
10,5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46



	ST 1	ST 2
OTR	Operatortransfer	
PR	Probe	
PO3	Prozeßoperator 3	
PO2	Prozeßoperator 2	
PO1	Prozeßoperator 1	
ZE	58.80	
GV	=	
Z3	3x + 9.30	
AV	+	
Z2	x + 2	
AO2-1		-2
AO2	+2	
Zo	x	
Z1	x + 7.30	
AO1-1		-7.30
AO1	+7.30	
Zo	x	
DO		:3
ST	Strategie	
TR4	Gleichsetzungsvorschrift	
TR3	Gesamtrechnung	
TR2	2 DM weniger als	
TR1	7.30 DM mehr als	
FR	Frage	
M1	Textlesen	


F9
51,50
PO3
PO2
PO1
ZE
Z3
AV
AO1-1
DO
ST
TR2
TR1
M1
27,30
20,00
22,00
22,30
15,00
17,00
24,30
17,00
19,60
23,30
16,00
18,00
24,00
16,70
18,70
67,30
54,30
60,90
57,30
58,40
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

8. LITERATURVERZEICHNIS

BAUERSFELD,H.: Der Simplexbegriff im Sachrechnen der Volksschule. In: Die Schulwarte, 18 (1965) H.2/3, S.124-133

BELLACK,A.A.; KLIEBARD,H.M.; TYMAN, R.T.; SMITH,F.L.: Die Sprache im Klassenzimmer. Düsseldorf 1974

BICHEL, U.: Umgangssprache. In: Lexikon der germanistischen Linguistik, Tübingen 1973

BIERMANN,N.; BUSSMANN,H.; NIEDWOROK,H.W.: Schöpferisches Problemlösen im Mathematikunterricht. München 1977

BIRKHAHN,G.: Analyse von Denkfehlern in der Mathematikdidaktik als kognitionspsychologisches Untersuchungsinstrument. In: Komplexe menschliche Informationsverarbeitung. Bern 1979, S.495-502

BREIDENBACH,W.(Hrsg.): Mathematik 8. Schuljahr. Braunschweig 1972

BREIDENBACH,W.: Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschulen. Hannover 1976

BRÜGELMANN,H.: Fallstudien in der Pädagogik. In: Z.f.Päd. 27 (1982) H.4, S.609-623

CLAPARÈDE,E.: Die Entdeckung der Hypothese. In: GRAUMANN,C.F.: Denken. Köln 1971, S. 109-115

DAMEROW,P.; ELLWITZ,U.; KEITEL,C.; ZIMMER,J.: Elementarmathematik: Lernen für die Praxis? Stuttgart 1974

DAVIS,J.E.; CAREY,H.H.; FOXMANN,P.N.; TARR,D.B.: Verbalisation Experimenter Presence and Problem Solving. In: J.of Pers. and Soc. Psy. 1968, S.299-302

DIEDERICH,J.; WULF,C.: Gesamtschulalltag. Die Fallstudie Kierspe. Paderborn 1979

DÖRNER,D.: Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart 1979

DÖRNER,D.; LUTZ,W.; MEURER,K.: Informationsverarbeitung beim Konzepterwerb. Z.f.Psy., 174 (1967), S.194-230

DREHER,E. und M.: Probleme bei Textaufgaben. In: Päd.Welt, 30 (1976) 3, S.156ff

DUNCKER,K.: Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin 1966

ELIAS,C.S.; PERFETTI,C.A.: Encoding Task and Recognition Memory. In: J.of Exp.Psy., Bd.99 (1973) S.151-156

FORD,B.; HALL,G.G.: Model building - an Educational Philosophy for applied Mathematics. In: Int.J.Math.Educ.Sci.Technol., Bd.1 (1970), S.77-83

FREIBICHLER,H.: Bedingungsanalyse des Problemlösens. Darmstadt 1977

FREUDENTHAL,H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd.1,2.A. 1977; Bd.2 1973

FREUDENTHAL,H.: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München 1978

GAGNE,R.M.; SMITH,E.C.: A Study of Effects of Verbalisation on Problem Solving. In: J. of Exp. Psy., Bd.63 (1962), S.12-18

GENNART,P.: Comprendre la mathématique modern. Verviers 1969

GLASER,G.: Mathématiques pour l'élève professeur. Paris 1971

GRIESEL,H.: Zu den unterschiedlichen Arten von Termini und ihre Verwendung im Mathematikunterricht. In: Schriftenreihe des IDM, Bd. 18, Bielefeld 1978, S.[illegible]

GRUNDEL,F.: Die Mathematik an höheren Schulen, T.II. Vom Anfang des 18.Jh. bis zum Anfang des 19.Jh., Leipzig 1929

GUNZ,S.: Theoretisch-praktisches Rechenbuch für Lehrende und Lernende. Prag 1808,3.A.

HESSISCHER VOLKSSCHULLEHRERVEREIN (Hrsg): Rechenschule, V. Heft, Cassel 1898

HÖRMANN,H.: Psychologie der Sprache. Berlin 1977

HAHN W.von: Fachsprachen. In: Lexikon der germanistischen Linguistik, Tübingen 1973, S.283-285

HIRSCH,M.:Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin 1816

JÄGER,S.: Zum Problem der sprachlichen Norm und seiner Relevanz für die Schule. In: Muttersprache, Z.zur Pflege und Erforschung der deutschen Sprache, 81 (1971) S.162-175

JOHNSON,D.A.; RISING,R.R.: Guidelines for Teaching Mathematics. Belmont 1972

JÜNGST,K.L.: Konstruktion und erste Evaluation eines Curriculums zur Förderung problemlösenden Verhaltens. Saarbrücken 1977

KALMYKOVA,J.: Process of Analysis and Synthesis in the Solution of Arithmetic Problems. In: KILPATRIC,J. et al (Ed.): Sov.Studies in the Psy. of Learning and Teaching Mathematics. Bd.XI, Chicago 1975

KANE,R.B.: The Readability of Mathematics Textbooks Revisited. In: The Mathematics Teacher, 63 (1970), S.579-581

KARASCHEWSKI,H.: Mathematik als erste Fremdsprache. In: Neue Sammlung, 3 (1970), S.290-306

KIRCHNER,H.: Hypothesenbildung und heuristische Techniken in Problemlöseprozessen. In: Z.f.Psy., Bd.179 (1971), H.1, S.1-36

KLEIN,F.: Allgemeines über angewandte Mathematik. In: KLEIN,F.; RIECKE,E. (Hrsg.): Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Leipzig 1900, S.15-25

KLEIN,G.: Besonderheiten der Analyse und Synthese beim Lösen mathematischer Bewegungsaufgaben. In: Pädagogik, Z.f. Theorie und Praxis d. soz. Erz., 1965, Beiheft 1, S.19-36

KLINE,M.: Warum kann Hänschen nicht rechnen? Weinheim 1974

KLIX,F.;RAUTENSTRAUCH-GOEDE,K.: Struktur-und Komponentenanalyse von Problemlöseprozessen. In: Z.f.Psy., Bd.174, 1967, S.167-193

KOBES,H.: Bedingungen und Verlauf beim Lösen mathematischer Textaufgaben. In: Pädagogik, Z.f.Theorie und Praxis d. soz. Erz., 1975, Beiheft 3, S.16-28

KRYGOWSKA,A.Z.: Processus de la mathématisation dans l'enseignement. In: Ed.St.in Mathem. 1 (1968), S.9-16

KUSCH,L.; AITS,D.: Mathematik Klasse 8. Essen 1975

LAUTESCHLÄGER,G.: Beispiele und Aufgaben zur Algebra für Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterricht. Darmstadt 1834

LAUTER,J.: Probleme des Sachrechnens in Grund- und Hauptschule. In: Päd.Welt, 32 (1978) H.11, S.655-663

LENNE,H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart 1969

LÖRCHER,G.A.(a): Mathematik als Fremdsprache. In: EBINGER,R. (Hrsg.): Reflektierte Schulpraxis. 10 (1974),M4

LÖRCHER,G.A.(b): Realitätsbezogenheit im Mathematikunterricht. In: Die Schulwarte, 27 (1974) 5, S.74-83

LOMPSCHER,J.; STAHL,R.: Besonderheiten der Analyse und Synthese im Denken der Schüler beim Lösen arithmetischer Textaufgaben. In: Pädagogik, Z.f. Theorie und Praxis d.soz.Erz., 1962, Beiheft 4

LÜER,G.: Gesetzmäßige Denkabläufe beim Problemlösen. Weinheim 1973

LUCHINS,A.S.: Mechanisierung beim Problemlösen. In: GRAUMANN, C.F. (Hrsg.): Denken, Köln 1971

MAIER,H.: Zahl und Sache. In: Päd.Welt. 23 (1969) H.12, S.717 - 733

MAIER,H.: Vom Sachrechnen zur sachbezogenen Mathematik. In: W.p.B., 27 (1975) H.9, S.474-480

MAIER,H.: Didaktik der Mathematik. Donauwörth 1972

MAIER,H.; BAUER,L.: Zum Problem der Fachsprache im Mathematikunterricht. In: Schriftenreihe des IDM, Bd.18, Bielefeld 1979, S.137-158

MAIER,H.; SCHUBERT,A.: Sachrechnen. Empirische Befunde, didaktische Analysen, methodische Anregungen. München 1978

MERZ,F.: Der Einfluß des Verbalisierens auf die Leistung bei Intelligenzaufgaben. In: Z.f.exp.und angew.Psy., Bd.XVI (1969), S.114ff

MILLER,G.A.; GALANTER,E.; PRIBRAM,K.: Strategien des Handelns. Stuttgart 1973

MIZRAHI,A.; SULLIVAN,M.: Mathematical Models and Applications: Suggestions for the High School Classroom. In: Math.Teacher, 66 (1973), S. 394-402

MÖHN,D.: Fach- und Gemeinsprache. In: Wortgeographie und Gesellschaft, Berlin 1968, S.315-348

NIEPOTH,J.: NIEPOTH's Rechenbuch. 13te Doppelauflage, Ausgabe für Lehrer, Gießen 1886

NEIGENFIND,F.: Arten mathematischer Schüleraufgaben. Berlin 1962

NESHER,P.: Three Determinants of Difficulty in Verbal Arithmetic Problems. In: Ed.Stud.i.Math.,7(1976), S.369-388

NESHER,P.; KATRIEL,T.: A semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. In: Ed.Stud.i. Math., 8(1977), S.251-269

NESHER,P.; TEUBAL,E.: Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving. In: Ed.Stud.i.Math., 6(1975), S.41-51

NETT,B.: Über das Sachrechnen in der Volksschule. In: Päd. Welt, 13 (1959) H.6, S.304-315

PAIGE,J.M.; SIMON,H.A.: Cognitive Processes in Solving Algebra Word Problems. In: KLEINMUNTZ,B.: Problem Solving. New York 1966, S.19-51

PETERS,H.: Untersuchungen zur Codierung eines Problems im Verlauf des Lösungsprozesses. In: Z.f.exp. und angew. Psy. Bd.VI (1974) H.3, S.409-429

PHELAN,J.G.: A Replication of a Study on the Effects of Attempts to verbalise on the Processus of Concept Attainment. J.of Psy., Bd.59 (1965), S.283-293

PIPPIG,G.: Psychologische Überlegungen zur Überwindung von Denkfehlern. In: Mathem.i.d.Sch., 15 (1977) H.1, S.26-41

PIPPIG,G.: Zu psychologischen Problemen des Mathematikunterrichts. In: Mathem.i.d.Sch., 11 (1973) H.5, S.257-264

RADATZ,H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig 1980

RADATZ,H.: Individuum und Mathematikunterricht. Hannover 1976

SATTLER,A.: Zeichnen beim Lösen von Sachaufgaben. In: Päd. Welt, 23 (1969) H.12, S.733ff

SCHLAAK,G.: Fehler im Rechenunterricht. Hannover 1968

SCHRODER,H.M.: Human information processing. New York 1967

SEARLE,J.R.: Sprechakte. Frankfurt 1977

SERVAIS,W.: Comment enseigner la mathématique pour qu'elle soit utile. In.: Ed.Stud.i.Math. 1(1968), S.37-54

SIEBERT,H.: Besonderheiten im Denkvollzug der Schüler beim Lösen von Sachaufgaben. In: Pädagogik, Z.f.Theorie und Praxis d.soz.Erz., 1965, Beiheft 1, S.3-18

SKOWRONEK,H.: Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung. Hannover 1970

SPETH,S.: Das Bild von Familie und Gesellschaft in Sachaufgaben ausgewählter Rechenbücher. Essen 1973

STEINER,H.G.: Wie steht es mit der Mathematisierung unseres Mathematikunterrichts? In: Math.-phys.Sem.Ber., 11(1965), S.186-200

STEINER,H.G.: Zur Methodik des mathematisierenden Unterrichts. In: DÖRFLER,W.; FISCHER,R.(Hrsg.): Anwendungsorientierte Mathematik in der Sekundarstufe 2. Klagenfurt 1976, S.211-245

STRAUSS,J.: Sachrechnen im Dienste der Erziehung zu kreativem Verhalten. In: Unterricht heute, 24 (1973) H.10 S.454-459

STREHL,R.: Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg 1979

STRUNCK,H.J.: Die Bedeutung internaler Lernvoraussetzungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe am Beispiel ausgewählter Lerneinheiten. Diss. Frankfurt 1982

SÜLLWOLD,F.: Bedingungen und Gesetzmäßigkeiten des Problemlöseverhaltens. In: Bericht über den 22. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie. 1960, S.96-115

SYDOW,H.: Zur Klassifikation von Problemen und Lösungsprozeduren. In: KLIX,F.; KRAUSE,W.; SYDOW,H.: Kybernetik-Forschung, Analyse und Synthese von Problemlöseprozessen. Berlin 1972, S.11-27

TRAEGER,W.; UNGER,K.H.; MEYER,H.G.; VOGLER,M.: Mathematisches Arbeitsbuch für das 8. Schuljahr. Frankfurt 1974

WAERDEN,B.L.v.d.: Einfall und Überlegung. Stuttgart 1968

VIET,U.: Umgangssprache und Fachsprache im Geometrieunterricht. In: BAUERSFELD,H.(Hrsg): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Hannover 1978, S.13-23

VOLLRATH,H.J.: Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben. In: Schriftenreihe des IDM, Bd.18, Bielefeld 1979, S.57-73

WAGENSCHEIN,M.: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Bd.II, Stuttgart 1970

WEBER,H.: Grundlagen einer Didaktik des Mathematisierens. Frankfurt 1980

WINTER,H.; ZIEGLER,T.: Neue Mathematik, 8.Schuljahr. Hannover 1972

WINTER,H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover 1976, S.262-279

WINTER,H.: Umgangssprache - Fachsprache im Mathematikunterterricht. In: Schriftenreihe des IDM, Bd. 18, Bielefeld 1979, S. 5-56

WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974

SCHULTESTS

Frankfurter Analogietest FAT 7-8, Begabungstest für 7. und 8. Klassen. BELSER,H.; ANGER,H.; BARGMANN,R.,Hrsg.: Deutsches Institut für Internationale Päadagogische Forschung, Frankfurt am Main, Weinheim 1968

Verständiges Lesen VL 7-9, Schulleistungs- und Begabungstest für 7. bis 9. Klassen. ANGER,H.; BARGMANN,R.; VOIGT,M., Hrsg.: Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung, Frankfurt am Main, Weinheim 1971

Wortschatztest WST 7-8, Begabungstest für 7. und 8. Klassen. ANGER,H.; BARGMANN,R.; HYLLA,E., Hrsg.: Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung, Frankfurt am Main, Weinheim 1968

Lebenslauf

16.12.1938	geboren in Sangerhausen als Sohn des Edmund Polster und seiner Ehefrau Elfriede, geb. Gäbler
1944 - 1959	Besuch der Volksschulen in Oechlitz und Anspach/Ts, sowie des Aufbaugymnasiums in Usingen/Ts
1959 - 1960	Grundwehrdienst
1960 - 1964	Lehrerstudium an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/M, 1.Staatsexamen
1964 - 1974	Lehrer in Ober-Roden, Burg-Gräfenrode und Karben
1967	2. Staatsexamen
1974 - 1979	Pädagogischer Mitarbeiter am Seminar für Didaktik der Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt. Studium der Mathematik und der Pädagogik
1976	Diplom in Pädagogik
seit 1979	Lehrer an der Stadtschule in Butzbach und der Stadtschule an der Wilhelmskirche in Bad Nauheim

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353